Laboratorium Techniki Obliczeniowej i Symulacyjnej

Ćwiczenie 6. Rozwiązywanie równań różniczkowych w środowisku MATLAB.

Opracował: dr inż. Sebastian Dudzik

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodami (w tym numerycznymi) rozwiązywania liniowych równań różniczkowych zwyczajnych w programie Matlab.

2. Wprowadzenie

Równaniem różniczkowym liniowym nazywamy równanie postaci:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} = b_0 x + b_1 \dot{x} + b_2 \ddot{x} + \ldots + b_{m-1} x^{(m-1)} + b_m x^{(m)}. \quad (1)$$

W równaniu tym: x — wymuszenie, y — odpowiedź.

Rozwiązaniem równania (1) jest całka będąca sumą całki stanowiącej rozwiązanie równania różniczkowego jednorodnego oraz jednej z całek szczególnych będącej rozwiązaniem równania różniczkowego niejednorodnego:

$$y(t) = y_p(t) + y_u(t), \quad (2)$$

gdzie: $y_p(t)$ — składowa przejściowa (swobodna) jest rozwiązaniem następującego równania:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} = 0, \quad (3)$$

a $y_u(t)$ nazywana jest składową wymuszoną.

2.1. Analityczne metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych

2.1.1. Równanie jednorodne rzędu drugiego

Poniżej przedstawiono sposób rozwiązania liniowego, jednorodnego równania różniczkowego na przykładzie równania rzędu drugiego. Niech będzie dane równanie postaci:

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0. \quad (4)$$

Dokonujemy podstawienia:

$$y = e^{rt} \Rightarrow y' = re^{rt} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rt}. \tag{5}$$

Podstawiając następnie (5) do (4) można otrzymać równanie:

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{6}$$

Równanie (6) zwane jest równaniem charakterystycznym. W zależności od wartości pierwiastków równania charakterystycznego istnieją następujące rozwiązania równania różniczkowego:

1. Równanie (6) posiada dwa pierwiastki rzeczywiste r_1, r_2. Wtedy rozwiązanie równania (4) przyjmuje postać:

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \tag{7}$$

2. Równanie (6) posiada jeden pierwiastek podwójny r_{12}. Wtedy rozwiązanie równania (4) przyjmuje postać:

$$y(t) = (C_1 t + C_2) e^{r_{12} t} \tag{8}$$

3. Rozwiązaniem równania (6) jest para pierwiastków zespolonych sprzężonych: $r_1 = \alpha \pm j\beta$. Wtedy rozwiązanie równania (4) przyjmuje postać:

$$y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \tag{9}$$

W każdym przypadku stałe C_1 i C_2 wyznacza się na podstawie warunków początkowych.

2.1.2. Równanie niejednorodne rzędu pierwszego

Poniżej przedstawiono sposób rozwiązania liniowego, niejednorodnego równania różniczkowego na przykładzie równania rzędu pierwszego. Do rozwiązania wykorzystano metodę uzmienniania stałej. Niech będzie dane równanie:

$$t\frac{dy}{dt} - y = 2t^3. \tag{10}$$

Rozwiązanie równania niejednorodnego przebiega w następujących etapach:

Etap 1. Rozwiązanie równania jednorodnego.

Do realizacji etapu można wykorzystać metodę rozdzielania zmiennych.

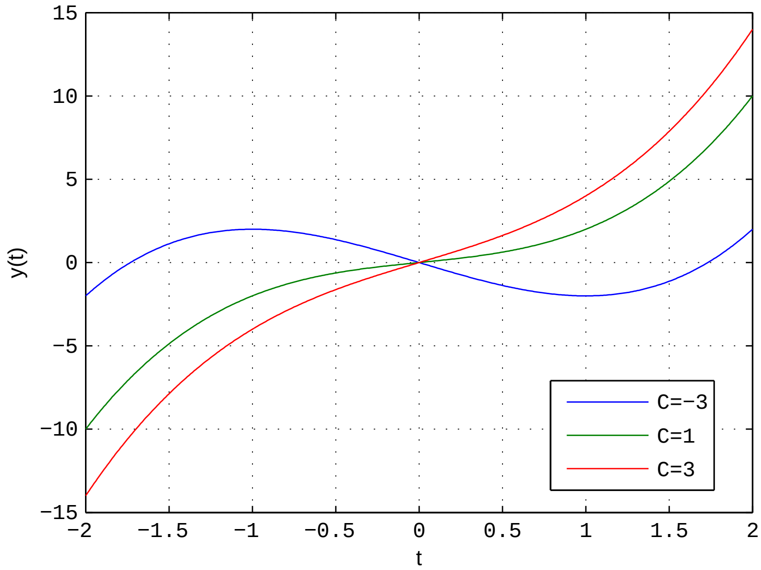
$$t\frac{dy}{dt} - y = 0 \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{t} dt, \tag{11}$$

czyli:

$$\ln|y| = \ln|t| + C. \tag{12}$$

Aby wyznaczyć całkę ogólną równania (10), należy dokonać podstawienia: $C = \ln|C_1|, C_1 \neq 0$. Ostatecznie całka ogólna przyjmuje postać:

$$y(t) = C_1 t. \tag{13}$$



Rys. 1. Wykres rozwiązania równania (10).

Etap 2. Uzmiennienie stałej.

Podstawienie: $C_1 = u(t)$, prowadzi do następującej postaci pochodnej poszukiwanej funkcji:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du(t)}{dt}t + u(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = u(t) + \frac{du(t)}{dt}t. \tag{14}$$

Etap 3. Podstawienie pochodnej postaci (14) **do równania** (10)**.**

$$\begin{aligned} t\left(u(t) + \tfrac{du(t)}{dt}t\right) - u(t)t &= 2t^3 \Rightarrow \\ \tfrac{du(t)}{dt}t^2 &= 2t^3 \Rightarrow \tfrac{du(t)}{dt} = 2t \Rightarrow u(t) = t^2 + C. \end{aligned} \tag{15}$$

Etap 4. Podstawienie wyniku przekształceń (15) **do pochodnej** (14)**.**

$$\frac{dy}{dt} = (t^2 + C) + 2t^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3t^2 + C. \tag{16}$$

Etap 5. Rozwiązanie równania (16)**.**

$$y(t) = \int (3t^2 + C)dt = 3\int t^2 dt + \int C dt = t^3 + Ct. \tag{17}$$

Rozwiązanie równania (10) dla trzech przykładowych wartości stałej C przedstawiono na rys. 1.

2.2. Numeryczne, jednokrokowe metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych

2.2.1. Metoda Eulera

Rozpatrywać będziemy zagadnienia początkowe, tzn. będziemy chcieli znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego dla zadanej wartości $u_0(t_0)$ w punkcie początkowym t_0:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= f(u(t), t) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned} \tag{18}$$

Podstawiamy: $t_i = t_0 + i\Delta t,\ u_i = u(t_i),\ f_i = f(u_i, t_i)$. W metodzie Eulera, pochodną występującą w równaniu (18) zastępujemy ilorazem różnicowym, opartym na węzłach $t_i,\ t_{i+1}$ (w przód):

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} = f(u_i, t_i) \Rightarrow u_{i+1} = u_i + i\Delta t f(u_i, t_i) \tag{19}$$

W powyższym równaniu Δt oznacza **krok całkowania**.

2.2.2. Modyfikacje metody Eulera (*midpoint, Heuna*)

Z uwagi na wolną zbieżność metody Eulera, aby zachować dużą dokładność obliczeń tą metodą trzeba stosować bardzo mały krok całkowania. Zwiększa to ilość wykonywanych operacji a w następstwie wydłuża czas potrzebny na uzyskanie rozwiązania. Zwiększeniu ulega też wymagana ilość pamięci operacyjnej niezbędna do wykonania całkowania. Powyższe niedogodności powodują, że częściej stosuje się ulepszoną metodę Eulera (*midpoint*). Polega ona na wprowadzeniu dodatkowego punktu (środek przedziału). Odpowiednie wzory przedstawiono poniżej:

$$\begin{aligned} t_{i+1/2} &= t_i + \frac{\Delta t}{2}, \\ u_{i+1/2} &= u_i + \frac{\Delta t}{2} f(u_i, t_i), \\ u_{i+1} &= u_i + \Delta t f(u_{i+1/2}, t_{i+1/2}). \end{aligned} \tag{20}$$

Innym sposobem przybliżenia ilorazu różnicowego jest obliczenie średniej arytmetycznej w punktach t_i, t_{i+1}. Opisywana modyfikacja nosi nazwę metody *Heuna*. Odpowiednie wzory przedstawiono poniżej:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(u_i, t_i), \\ k_2 &= f(u_i + \Delta t k_1, t_i + \Delta t), \\ u_{i+1} &= u_i + \frac{\Delta t}{2}(k_1 + k_2). \end{aligned} \tag{21}$$

2.2.3. Metody Rungego-Kutty

Dane jest równanie:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{22}$$

Rozwiązanie $x(t)$ ma następujące rozwinięcie w szereg Taylora w otoczeniu punktu $t = t_n$:

$$x(t_n+1) = x(t_n) + h\frac{dx(t_n)}{dt} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2x(t_n)}{dt} + \ldots + \frac{1}{p!}h^p x^{(p)}(t_n) + O(h^{p+1}), \tag{23}$$

gdzie: $x^{(i)}$ — i-ta pochodna zmiennej x, $O(h^{(p+1)})$ — lokalny błąd obcięcia, p — rząd rozwinięcia. Podstawiając (22) do (23), uzyskuje się następującą postać rozwinięcia:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n,t_n) + \frac{1}{2}h^2 f(x_n,t_n) + \ldots + \frac{1}{p!}h^p f^{(p-1)}(x_n,t_n) + O(h^{(p+1)}). \tag{24}$$

Dla $p = 1$ powyższe równanie przyjmuje postać algorytmu ekstrapolacyjnego Eulera. Dla $p > 1$ niezbędne jest obliczanie pochodnych funkcji $f(x_n, t_n)$. W metodzie Rungego-Kutty składniki wyższego rzędu rozwinięcia zostały aproksymowane odpowiednio dobraną funkcją. Algorytm Rungego-Kutty drugiego rzędu można zapisać w postaci następujących wzorów:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n t_n), \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2a}k_1, t_n + \frac{1}{2a}h), \\ x_{n+1} &= x_n + (1-a)k_1 + ak_2 + O(h^3), \end{aligned} \tag{25}$$

gdzie a — współczynnik liczbowy o odpowiednio dobranej wartości. Dla $a = \frac{1}{2}$ algorytm Rungego-Kutty przechodzi w opisywany wcześniej algorytm Heuna. Inna nazwa tego algorytmu to zmodyfikowany algorytm trapezów. Przyjmując $a = 1$, otrzymuje się algorytm Eulera-Cauchy'ego:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, t_n), \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{1}{2}h), \\ x_{n+1} &= x_n + k_2 + O(h^3). \end{aligned} \tag{26}$$

Z uwagi na to, że do osiągnięcia odpowiedniej dokładności niezbędne jest stosowanie małych kroków całkowania h, w praktyce często wykorzystuje się algorytm Rungego-Kutty czwartego rzędu:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, t_n), \\ k_2 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_2), \\ k_4 &= hf(t_n + h, x_n + k_3), \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 + O(h^5). \end{aligned} \tag{27}$$

W metodzie czwartego rzędu, do wyznaczenia wartości rozwiązania w kolejnym kroku, niezbędne jest czterokrotne obliczenie wartości funkcji. W tym algorytmie możliwe jest zwiększenie rzędu, ale prowadzi to do zwiększenia ilości obliczeń. Dlatego też w metodzie Rungego-Kutty przyjmuje się maksymalnie czwarty/piąty rząd. W takim przypadku schemat obliczeń nosi nazwę algorytmu Rungego-Kutty-Fehlberga (RKF):

$$\begin{array}{rcl} k_1 &=& hf(t_n, x_n), \\ k_2 &=& hf(t_n + a_2 h, x_n + b_{21}k_1), \\ k_3 &=& hf(t_n + a_3 h, x_n + b_{31}k_1 + b_{32}k_2), \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ k_6 &=& hf(t_n + a_6 h, x_n + b_{61}k_1 + b_{62}k_2 + \ldots + b_{65}k_5), \\ x_{n+1} &=& x_n + c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4 + c_5k_5 + c_6k_6 + O(h^6). \end{array} \tag{28}$$

Wartości współczynników a_i, b_{ij}, c_i określa się na podstawie odpowiednich tablic.

2.3. Wielokrokowe metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych

W wielokrokowych metodach całkowania numerycznego, do wykonania jednego kroku potrzebna jest znajomość rozwiązań z wielu poprzednich kroków. W odróżnieniu od Metod Rungego-Kutty, w metodach wielokrokowych wykorzystuje się wielomianową aproksymację rozwiązania:

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_k t^k. \tag{29}$$

Stopień wielomianu k nazywa się rzędem algorytmu. W praktyce rząd nie przekracza 10. Współczynniki wielomianu $\alpha_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$ oblicza się znając wartości rozwiązania w wielu punktach czasowych $t = t_n, t_{n-1}, t_{n-2}, \ldots, t_{n-p}$. Dlatego też metody te zwane są wielokrokowymi. Najczęściej stosowaną postacią rozwiązania jest:

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{p} a_i x_{n-i} + h \sum_{i=-1}^{p} b_i f(x_{n-i}, t_{n-i}). \tag{30}$$

Przykładem metody wielokrokowej jest algorytm Adamsa-Bashfortha. Wzór całkowania określony jest następująco:

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=0}^{k-1} b_i f(x_{n-i}, t_{n-i}), \tag{31}$$

przy czym współczynniki b_i są wyznaczane poprzez rozwiązanie macierzowego układu równań liniowych rzędu k. W tabeli zestawiono wzory całkowania dla algorytmu Adamsa-Bashfortha o narastającym rzędzie.

k	Wzór algorytmu
1	$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, t_n)$
2	$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}[3f(x_n, t_n) - f(x_{n-1}, t_{n-1})]$
3	$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12}[23f(x_n, t_n) - 16f(x_{n-1}, t_{n-1}) + 5f(x_{n-1}, t_{n-2})]$

Tab. 1. Wzory całkowania Adamsa-Bashfortha

2.4. Rozwiązywanie równań różniczkowych z wykorzystaniem ODE Solver pakietu MATLAB

W pakiecie MATLAB istnieje wiele funkcji wspomagających rozwiązywanie równań różniczkowych. najczęściej stosowaną grupą funkcji są ODE (Ordinary Differential Equation) solwery. Najprostsza postać wywołania funkcji rozwiązującej układ równań różniczkowych to:

```
[t,y]=odeXX('fun',[t_0 t_max],war_pocz),
```

gdzie: t — wektor czasu, y — wektor rozwiązań, 'fun' — nazwa funkcji opisującej rozwiązywany układ równań, [t_0, t_max] — przedział zmiennej niezależnej, war_pocz — warunki początkowe. Aby rozwiązać równanie n-tego rzędu za pomocą solwera ODE, należy zamienić je na układ n równań 1 rzędu. W równaniu:

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{32}$$

dokonujemy podstawień:

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= y^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{33}$$

Powstaje układ równań:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_n' &= f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned} \tag{34}$$

Dla przykładu rozpatrzmy równanie Van der Pola:

$$y_1'' - \mu(1 - y_1^2)y_1' + y_1 = 0. \tag{35}$$

Po odpowiednich podstawieniach powstaje układ równań:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1. \end{aligned} \tag{36}$$

Aby rozwiązać powyższy układ za pomocą funkcji ODE należy najpierw utworzyć funkcję opisującą wektor prawych stron układu równań. Poszczególne wiersze opisują prawe strony równań. W przykładzie wektor prawych stron zawiera 2 elementy. Poniżej przedstawiono funkcję pomocniczą, której nazwę przekazuje się jako parametr wywołania solwera ODE (dla uproszczenia założono $\mu = 1$).

```
function dydt=vdp1(t,y)}
dydt=[y(2);(1-y(1)^2)*y(2)-y(1)]
```

Przyjmijmy, że interesuje nas rozwiązanie równania w przedziale: $t \in < 0; 20 >$ z warunkami początkowymi: $y(0) = 2, y'(0) = 0$. Wywołanie solwera ODE dla metody Rungego-Kutty czwartego/piątego rzędu może przyjąć następującą postać:

```
[t,y] = ode45('vdp1',[0 20],[2; 0]);
```

W wyniku wykonania polecenia, powstaje wektor czasu t oraz dwukolumnowa macierz y zawierająca rozwiązanie y oraz jego pierwszą pochodną y'. Poniższy skrypt umożliwia utworzenie wykresu:

```
plot(t,y(:,1),'-',t,y(:,2),'--')
title('Rozwiązanie równania van der Pola, \mu=1');
xlabel('czas t');
ylabel('rozwiązanie, y');
legend('y_1','y_2');
```

3. Program ćwiczenia

1. Uruchomienie programu MATLAB.
   W ćwiczeniu wykorzystano program MATLAB w wersji 5.3 (R11.1). Uruchomienie programu następuje poprzez skrót na pulpicie (Matlab5.3) lub bezpośrednio z katalogu *C:\MatlabR11\ bin*.

2. Uruchomienie programu Wordpad.exe.
   Program można uruchomić poprzez wywołanie: *Start\Programy\Akcesoria\ Wordpad* lub poprzez skrót na pulpicie.

3. Przejście do katalogu roboczego dla grupy laboratoryjnej.
   Domyślnym katalogiem startowym (roboczym) programu MATLAB jest *C:\Matlab R11\ work*. Zadanie polega na przejściu do podkatalogu katalogu *work*. Podkatalog (utworzony na pierwszych zajęciach laboratoryjnych) nazwany jest wybranymi 2 nazwiskami studentów, wchodzących w skład grupy laboratoryjnej.

   (a) Wprowadzić:
   `>>pwd`
   W programie MATLAB każde wprowadzone polecenie zatwierdza się klawiszem `<ENTER>`. Zwrócić uwagę na ścieżkę dostępu do katalogu bieżącego.

   (b) Wprowadzić:
   `>>cd` ***`nazwa_podkatalogu`***
   Parametr *nazwa_pod-katalogu* powinien składać się z nazwisk 2 wybranych studentów grupy laboratoryjnej (np. `>>cd KowalskiNowak`).

4. Obserwacja rozwiązań równań różniczkowych na podstawie obliczeń analitycznych

   (a) Rozwiązać równanie: $y' + 2y = 10 + 10\cos 2t$, przy warunku początkowym: $y(0) = 2$.
   Równanie charakterystyczne:

$$r + 2 = 0 \Rightarrow r = -2. \tag{37}$$

   Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego:

$$y_p = C_1 e^{-2t}. \tag{38}$$

   Postać rozwiązania szczególnego:

$$y_u = A + B\cos 2t + C\sin 2t. \tag{39}$$

   Podstawiając: (39) do zadanego równania różniczkowego otrzymuje się: $A = 5, B = C = 5/2$. Z warunku początkowego: $C_1 = -11/2$, więc ostatecznie:

$$y = y_p + y_u = -\frac{11}{2}e^{-2t} + 5 + \frac{5}{2}(\cos 2t + \sin 2t). \tag{40}$$

(b) W oknie poleceń wprowadzić:
```
>>t1 = 0:0.1:10;% wektor wartości zmiennej niezależnej
>>y1 = (-11/2)*exp(-2.*t1)+5+(5/2)*(cos(2.*t1)+ sin(2.*t1));
>>plot(t1, y1);% wykres
```
(c) Skopiować zawartość okna poleceń programu MATLAB do programu Wordpad.

(d) Wyczyścić zawartość okna poleceń programu MATLAB poleceniem:
```
>>clc
```
(e) Skopiować wykres do programu Wordpad

(f) Rozwiązać równanie: $y'' + 2y' + 5y = t$, przy warunkach początkowych: $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.
Równanie charakterystyczne (jednorodne):

$$r^2 + 2r + 5 = 0. \tag{41}$$

Jest to równanie kwadratowe o wyróżniku $\Delta < 0$. Pierwiastki równania zespolone sprzężone: $r_1 = -1 + 2j,\ r_2 = -1 - 2j$. Rozwiązanie ogólne:

$$y_p = e^{-t}\left(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t\right). \tag{42}$$

Postać rozwiązania szczególnego (metoda przewidywań):

$$y_u = At + b. \tag{43}$$

Podstawiając (43) do (42), otrzymuje się: $A = 1/5,\ B = -2/25$. Z warunków początkowych $C_1 = 2/25,\ C_2 = 47/50$, więc:

$$y_u = \frac{1}{5}t - \frac{2}{25}, \tag{44}$$

i ostatecznie:

$$y = y_p + y_u = \frac{1}{5}t - \frac{2}{25} + e^{-t}\left(\frac{2}{25}\cos 2t + \frac{47}{50}\sin 2t\right). \tag{45}$$

(g) Wyświetlić w programie MATLAB rozwiązanie dane równaniem (45), jak w p. 4b.

(h) Skopiować zawartość okna poleceń programu MATLAB do programu Wordpad.

(i) Wyczyścić zawartość okna poleceń programu MATLAB.

(j) Skopiować wykres do programu Wordpad.

(k) Rozwiązać równanie: $y' + 2y = 10 + 10\sin 2t$, przy warunku początkowym: $y(0) = 2$. Napisać program drukujący wykres rozwiązania y, jak w p. 4b. Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

(l) Rozwiązać równanie: $y'' + 3y' + 2y = t$, przy warunkach początkowych: $y(0) = 2,\ y'(0) = 2$. Napisać program drukujący wykres rozwiązania y, jak w p. 4b. Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

5. Obserwacja rozwiązań równania różniczkowego w zależności od zmian warunków początkowych.

   (a) Rozwiązać równanie $y' + 2y = 10 + 10\cos 2t$, przy warunku początkowym $y(0) = a$.
   Rozwiązanie ogólne: $y_p = C_1 e^{-2t}$, rozwiązanie szczególne: $y_u = A + B\cos 2t + C\sin 2t$. Stałe występujące w rozwiązaniu szczególnym: $A = 5,\ B = C = 5/2$.
   Rozwiązanie równania różniczkowego:
   $$y = y_p + y_u = C_1 e^{-2t} + 5 + \frac{5}{2}(\cos 2t + \sin 2t) \tag{46}$$
   Zakładając $y(0) = a$, mamy:
   $$\begin{aligned} a = C_1 e^0 + 5 + \tfrac{5}{2}(\cos 0 + \sin 0) \\ a = C_1 + 5 + \tfrac{5}{2} \\ C_1 = -5 - \tfrac{5}{2} + a, \end{aligned} \tag{47}$$
   czyli:
   $$y = (-5 - \frac{5}{2} + a)e^{-2t} + 5 + \frac{5}{2}(\cos 2t + \sin 2t) \tag{48}$$

   (b) Napisać program drukujący wykres rozwiązania y, dla $a = 2$, $a = 10$, $a = 50$, $a = 15/2$. Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

   (c) Rozwiązać równanie $y' + 2y = 10 + 10\cos 2t$, przy warunku początkowym $y(0) = b$. Napisać program drukujący wykres rozwiązania y dla zadanych przez prowadzącego wartości warunku brzegowego b. Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

6. Rozwiązywanie równań różniczkowych metodą Eulera.

   (a) Zaprogramować rozwiązanie równania z pkt. 4a metodą Eulera..
   W edytorze programu MATLAB wprowadzić:

```
deltat = 0.1;
t_euler = 0:deltat:10;
y_euler = zeros(size(t_euler));
y_euler(1,1) = 2 ;
for i = 1:length(t_euler)-1
y_euler(1,i+1) = y_euler(1,i) + deltat.*(10+10.* ...
cos(2.*t_euler(1,i)) - 2.*y_euler(1,i));
end
plot(t_euler,y_euler);
```

   Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

   (b) Zmodyfikować program z pkt. 6a tak, aby na jednym wykresie wyświetlał rozwiązanie przybliżone i rozwiązanie dokładne. Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

(c) Zmodyfikować program z pkt. 6a tak, aby możliwe było zadawanie kroku całkowania (zmienna `deltat`). Wygenerować (na jednym wykresie) rozwiązania dla trzech, podanych przez prowadzącego wartości kroku całkowania.

(d) Zmodyfikować program z pkt. 6a tak, aby możliwe było zadawanie warunku początkowego. Wygenerować (na jednym wykresie) rozwiązania dla trzech, podanych przez prowadzącego warunków początkowych. Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

(e) Zaprogramować rozwiązanie równania z pkt. 4a ulepszoną metodą Eulera (midpoint). Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

(f) Zaprogramować rozwiązanie równania z pkt. 4k metodą Eulera. Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

(g) Zmodyfikować program z pkt. 6f tak, aby na jednym wykresie wyświetlał rozwiązanie przybliżone i rozwiązanie dokładne. Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

(h) Zmodyfikować program z pkt. 6f tak, aby możliwe było zadawanie kroku całkowania (zmienna `deltat`). Wygenerować rozwiązania dla trzech podanych przez prowadzącego wartości kroku całkowania.

(i) Zmodyfikować program z pkt. 6f tak, aby możliwe było zadawanie warunku początkowego. Wygenerować (na jednym wykresie) rozwiązania dla trzech, podanych przez prowadzącego warunków początkowych. Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

(j) Zaprogramować rozwiązanie równania z pkt. 4k ulepszoną metodą Eulera (midpoint). Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

7. Rozwiązywanie równań różniczkowych metodą Rungego-Kutty.

(a) Zaprogramować rozwiązanie równania z pkt. 4a metodą Rungego-Kutty drugiego rzędu (wzór (25)).

(b) Przetestować działanie programu dla $a = 1/2$ (algorytm Heuna) oraz dla $a = 1$ (algortm Eulera-Cauchy'ego). Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

(c) Zaprogramować rozwiązanie równania z pkt. 4a metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu (wzór (27)).

(d) Przetestować działanie programu dla $a = 1/2$ (algorytm Heuna) oraz dla $a = 1$ (algortm Eulera-Cauchy'ego). Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

(e) Zaprogramować rozwiązanie równania z pkt. 4k metodą Rungego-Kutty drugiego rzędu (wzór (25)).

(f) Przetestować działanie programu dla $a = 1/2$ (algorytm Heuna) oraz dla $a = 1$ (algortm Eulera-Cauchy'ego). Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

   (g) Zaprogramować rozwiązanie równania z pkt. 4k metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu (wzór (27)).
   (h) Przetestować działanie programu dla $a = 1/2$ (algorytm Heuna) oraz dla $a = 1$ (algortm Eulera-Cauchy'ego). Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.
   (i) Zaprogramować rozwiązanie równania Van der Pola (35) metodą Rungego-Kutty drugiego rzędu (wzór (25)).
   (j) Przetestować działanie programu dla $a = 1/2$ (algorytm Heuna) oraz dla $a = 1$ (algortm Eulera-Cauchy'ego). Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.
   (k) Zaprogramować rozwiązanie równania Van der Pola (35) metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu (wzór (27)).
   (l) Przetestować działanie programu dla $a = 1/2$ (algorytm Heuna) oraz dla $a = 1$ (algortm Eulera-Cauchy'ego). Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

8. Rozwiązywanie równań różniczkowych z wykorzystaniem ODE Solver programu MATLAB.
   (a) Zaprogramować rozwiązanie równania z pkt. 4a wykorzystując ODE Solver. Przetestować działanie programu dla dwóch przedziałów zmiennej niezależnej oraz dla 2 warunków początkowych podanych przez prowadzącego. Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.
   (b) Zaprogramować rozwiązanie równania z pkt. 4k wykorzystując ODE Solver. Przetestować działanie programu dla dwóch przedziałów zmiennej niezależnej oraz dla 2 warunków początkowych podanych przez prowadzącego. Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.
   (c) Zaprogramować rozwiązanie równania Van der Pola (35), wykorzystując ODE Solver. Przetestować działanie programu dla dwóch przedziałów zmiennej niezależnej, dla 2 warunków początkowych oraz 2 wartości parametru μ (równanie (35)) podanych przez prowadzącego. Skopiować program i wyniki jego działania do programu Wordpad.

4. Opracowanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy umieścić polecenia oraz wyniki ich działania skopiowane w trakcie ćwiczenia z okna środowiska MATLAB. Do każdej linii kodu oraz do każdego wyniku, należy dodać komentarz objaśniający.

Przykład.
...`2+round(6/9+3*2)/2-3` — obliczenie wartości wyrażenia. Funkcja `round(6/9+3*2)` zaokrągla wynik działania `6/9+3*2` do najbliższej liczby całkowitej...