Zespół Automatyki ZTMAiPC
Wydział Elektryczny

LABORATORIUM MODELOWANIA I SYMULACJI

Ćwiczenie 8

Modelowanie obiektów o stałych rozłożonych

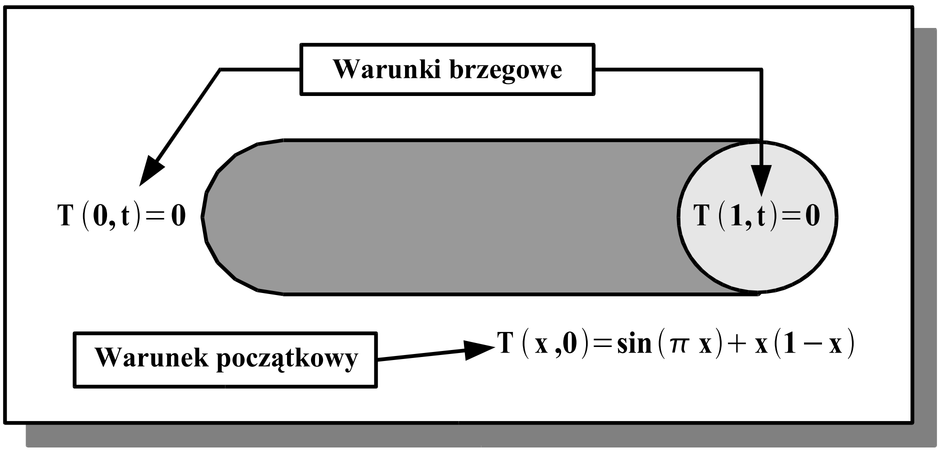
1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się ze sposobami modelowania układów o stałych rozłożonych. W instrukcji zawarto podstawowe informacje na temat metody różnic skończonych wykorzystywanej do rozwiązywania jednowymiarowego zagadnienia przepływu ciepła. Dodatkowo przedstawiono metodę nadrelaksacji na przykładzie równania Laplace'a.

2. Obiekty o stałych rozłożonych

2.1 Jednowymiarowy, nieustalony przepływ ciepła w ciele stałym. Warunki początkowe i brzegowe

Rys. 1 przedstawia model obiektu o stałych rozłożonych. Modelowanym zjawiskiem jest ruch ciepła w pręcie o długości $L = 1$, przez który przepływa prąd elektryczny. Przepływ prądu powoduje generowanie ciepła wewnątrz pręta. Oba końce pręta są zanurzone w temperaturze $T = 0$. W tym przypadku pomimo tego, że obiekt modelowany ma trzy wymiary geometryczne zagadnienie określa się mianem jednowymiarowego. Jest to związane z faktem, że przepływ ciepła odbywa się tylko w jednym kierunku (od wnętrza walca na zewnątrz). Warunki brzegowe $T(0,t)$ oraz $T(1,T)$ określają wartość temperatury na końcach pręta (brzegach obszaru). Oprócz warunków brzegowych dla rozwiązania zagadnienia opisywanego cząstkowym równaniem różniczkowym niezbędna jest znajomość warunku początkowego. Podobnie jak w zagadnieniach opisywanych równaniami zwyczajnymi, warunki początkowe określają, jakie wartości musi przyjmować rozwiązanie w chwili $t = 0$.



Rysunek 1. Geometria, warunki brzegowe i warunek początkowy

Do opisu matematycznego opisywanego zjawiska stosuje się jednowymiarowe równanie nieustalonego przepływu ciepła:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{k}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1}$$

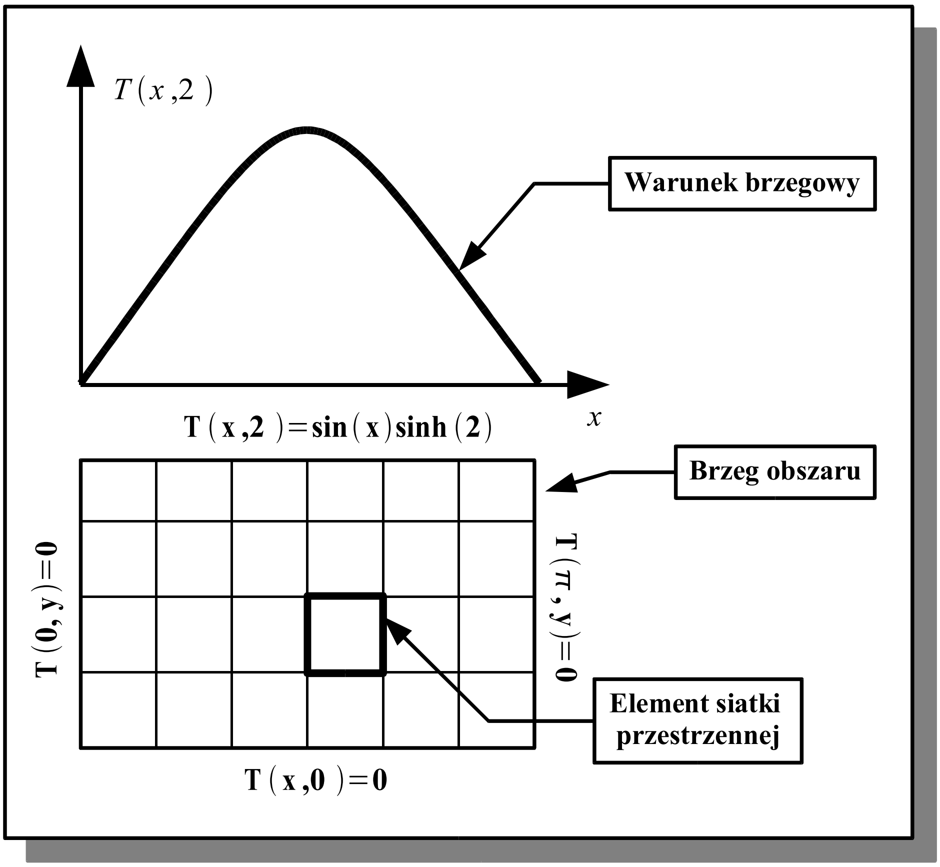
podawane wraz z warunkami jednoznaczności rozwiązania (brzegowymi i początkowym).

W równaniu (1): $T(x,t)$ – wartość temperatury w punkcie x, w chwili czasu równej t; k – współczynnik dyfuzyjności cieplnej (zależny od rodzaju materiału); $f(x,t)$ – funkcja wydajności cieplnej objętościowych źródeł mocy. Można wykazać, że przy podanych warunkach brzegowych równanie (1) posiada następujące rozwiązanie:

$$T(x,t) = e^t \sin(\pi x) + x(1-x) \tag{2}$$

2.2 Dwuwymiarowy, ustalony przepływ ciepła w ciele stałym

Na Rys. 2 przedstawiono dwuwymiarowe zagadnienie ustalonego przepływu ciepła wraz z warunkami brzegowymi.



Rysunek 2. Dwuwymiarowy, ustalony przepływ ciepła

Zagadnienie opisuje równanie *Laplace'a*:

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial T(x,y)}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Problem brzegowy, ustalony nie wymaga podawania warunku początkowego. Jeżeli w równaniu (3) prawa strona zostanie zastąpiona niezerową funkcją, równanie nazywamy równaniem *Poissona.* Rozwiązanie równania (3) jest uzależnione od warunków brzegowych panujących na granicach (brzegach) rozpatrywanego obszaru. Przy uwzględnieniu warunków brzegowych jak na rys. 2 ma postać:

$$T(x,y) = \sin(x)\sinh(y) \tag{4}$$

3. Podstawy metody różnic skończonych

3.1 Wprowadzenie

Do rozwiązywania zagadnień brzegowych jedno i wielowymiarowych często stosuje się metodę różnic skończonych opartą na aproksymacji pochodnej funkcji ilorazem różnicowym „w przód”. Dla uproszczenia rozpatrzmy pochodną funkcji jednej zmiennej:

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{5}$$

gdzie: h oznacza niewielki rozmiar kroku. Aby wprowadzić pojęcie rzędu aproksymacji rozwińmy $f(x_0+h)$ w szereg Taylora wokół punktu x_0:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)+\frac{h}{2}f''(x_0)+\frac{h^2}{6}f'''(x_0)+RN \tag{6}$$

gdzie RN oznacza składniki rozwinięcia wyższych rzędów. Przyjmując, że h jest bardzo małe, błąd popełniany przez stosowanie równania (5) jest w przybliżeniu równy $\frac{h}{2}f''(x_0)$. Mówimy, że błąd aproksymacji w równaniu (5) jest rzędu h i oznaczamy go *O(h)*. Tego rodzaju aproksymacja nie jest satysfakcjonująca. Dla przykładu, dokładność 0.001, będzie wymagała bardzo małego kroku h. Z tego powodu wymagana jest aproksymacja rzędu h^2 lub wyższego. Poniżej przedstawiono aproksymację rzędu h^2, opartą na centralnym ilorazie różnicowym:

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}. \tag{7}$$

W późniejszych rozważaniach niezbędna będzie również znajomość przybliżenia $f''(x_0)$:

$$f''(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}. \tag{8}$$

3.2 Aproksymacja rozwiązania jednowymiarowego równania przewodzenia ciepła

Poszukujemy rozwiązania równania (1) dla zadanych warunków brzegowych. Wprowadźmy oznaczenia: $h=x_{i+1}-x_i$ oraz $\Delta t=t_{j+1}-t_j$ jako odległość pomiędzy wartościami rozwiązania w punktach (x_i, y_j) (współrzędne siatki czasowo-przestrzennej). Oznaczając: $T_{i,j}=T(x_i,t_j)$ można równanie (1) zapisać jako:

$$\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{\Delta t} = \frac{1}{k}\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-j,j}}{h_2}+f_{i,j}. \tag{9}$$

Przekształcając (9) ze względu na $T_{i,j}$ otrzymuje się:

$$T_{i,j+1}=(1-2\lambda)T_{i,j}+\lambda(T_{i+1,j}+T_{i-1,j})+\Delta t f_{i,j}. \tag{10}$$

gdzie: $\lambda=\frac{\Delta t}{kh^2}$, $i = 1, 2, \ldots n$

Wygodnie jest zapisać równanie (10) w postaci macierzowej. Przyjmując, że $\boldsymbol{T}_j$ oznacza wektor ($T_{1j}, T_{2j}, \ldots, T_{nj}$): $\boldsymbol{T}_{j+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_j + \boldsymbol{f}_j$, gdzie:

$$A=\begin{pmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{pmatrix} \tag{11}$$

3.3 Metoda Cranka – Nicolsona.

W celu poprawy stabilności numerycznej oraz zwiększenia dokładności obliczeń, często stosuje się metodę Cranka – Nicolsona (C-N). W metodzie tej wprowadza się macierz B:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Oznaczając przez ***I*** – macierz jednostkową, można wprowadzić następujące macierze:

$$C=2I+\lambda B\,,\; D=2I-\lambda B \tag{13}$$

zagadnienie brzegowe rozwiązuje się zgodnie z równaniem macierzowym:

$$CT_{j+1}=DT_j+2\;\Delta t f_j \tag{14}$$

3.4 Aproksymacja rozwiązania dwuwymiarowego zagadnienia ustalonego przepływu ciepła – metoda nadrelaksacji

Zagadnienie przedstawione w punkcie 2.2, zostanie rozwiązane metodą nadrelaksacji. W metodzie tej wyróżnić można następujące etapy:

1. Podział obszaru zagadnienia (utworzenie siatki) o odległościach pomiędzy węzłami odpowiednio: Δx w poziomie oraz Δy w pionie.
2. Przypisanie warunków brzegowych węzłom brzegowym, a węzłom wewnętrznym dowolnych wartości początkowych.
3. Wyznaczenie nowych wartości rozwiązania dla węzłów wewnętrznych:

   Równanie (3), uwzględniając (7) i (8) można zapisać jako:

   $$2RT_{i,j}-T_{i-1,j}-T_{i+1,j}-rT_{i,j-1}-rT_{i,j+1}=0 \tag{15}$$

   gdzie: $r=\dfrac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$, $R = (1+r)$. Jeżeli Δx = Δy, to: $r = 1$, $R = 2$, oraz:

   $$T_{i,j}=\frac{T_{i+1,j}+T_{i-1,j}+T_{i,j-1}+T_{i,j+1}}{4} \tag{16}$$

4. Kolejne iteracje równania (16) prowadzą do rozwiązania zagadnienia.

4. Program ćwiczenia.

UWAGA: Wszystkie wykresy powstające po uruchomieniu skryptów wraz z odpowiednimi opisami należy kopiować do programu Wordpad.

4.1 Wykreślanie rozwiązania dokładnego jednowymiarowego, nieustalonego przepływu ciepła

Zapoznać się z zawartością pliku skryptowego d1_dokladne.m

Z linii poleceń programu MATLAB wprowadzić polecenie:

```
>> d1_dokladne
```

Wyedytować plik d1_dokladne.m. Zmienić chwile czasowe (np.: czas = 0.1, czas = 0.4, czas = 0.7). Zmienić zawartość legendy (polecenie `legend()`). Powtórnie uruchomić skrypt.

4.2 Wyznaczanie rozwiązania numerycznego jednowymiarowego, nieustalonego zagadnienia przepływu ciepła.

Zagadnienie brzegowe opisano w punkcie 2.1. Wyznaczyć rozwiązanie numeryczne zagadnienia dla następujących danych liczbowych:

$$k=\pi^2 \frac{J}{cm\,sec^o C} \quad \rho=4\,\frac{g}{cm^3}$$

$$c=0.01\,\pi^2 \frac{J}{g\,m^o C} \quad q'''=0.08\,\frac{J}{sec\,cm^3}$$

W tym celu należy wprowadzić następujący skrypt w języku MATLAB:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Skrypt wyznacza rozwiązanie jednowymiarowego, nieustalonego
% równania przewodnictwa cieplnego
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% parametry fizykalne (stałe)
pii = 3.1415927;
k = pii^2;          % współczynnik przenikania temperatury
rho = 4;            % gęstość materiału
c = 0.01*pii^2;     % ciepło właściwe materiału
q = 0.08;           % wydajność cieplna źródeł wewnętrznych
                    % ciepło Joule'a)
f = 2/(pii^2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% parametry związane z algorytmem obliczeń numerycznych
n = 9;                    % ilość punktów podziału
                          % przestrzennego
                          % (bez elementów brzegowych)
h = 1/(n+1)               % krok przestrzenny
deltaT = 0.001            % krok czasowy
lambda = deltaT/(k*h^2)   % parametr równania różnicowego
x = 0:h:1;                % siatka przestrzenna
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% warunek brzegowy
 T = zeros(n+2,1000);    % Jeżeli zeros(..) to warunek zerowy
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% warunek początkowy
for i=1:n+2
T(i,1) = sin(pi*x(i))+x(i)*(1-x(i));
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Iteracje kolejnych kroków czasowych (wskaźnik: j) i
% przestrzennych (wskaźnik: i)
for j=2:1000
    for i=2:n+1
        T(i,j)=(1-2*lambda)*T(i,j-1)+lambda*(T(i+1,j-1)+ ...
        T(i-1,j-1))+deltaT*f;
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

zapisać skrypt pod nazwą d1_iter.m. Uruchomić skrypt wpisując w oknie poleceń:

```
>>d1_iter
```

4.3 Wykreślanie rozwiązania jako wykresu dwuwymiarowego

W oknie poleceń programu MATLAB wprowadzić polecenie:

```
>>d1_wykres2d(x, [T(:,1), T(:,501), T(:,1000)]);
```

Wywołanie skryptu powoduje wykreślenie rozkładu temperatur wzdłuż obiektu dla trzech chwil czasowych: t = 0s, t = 0.5s, t = 0.999s

4.4 Wykreślanie rozwiązania jako wykresu trójwymiarowego

W oknie poleceń programu MATLAB wprowadzić polecenia:

```
[X, Y]=meshgrid(0:deltaT:0.999,x);
d1_wykres3d(X,Y,T);
```

4.5 Zmiana wydajności wewnętrznego źródła ciepła

Wyedytować plik skryptowy d1_iter.m. Zmienić wydajność wewnętrznego źródła ciepła np.:

```
f = 4/(pii^2);    % wydajność cieplna źródeł wewnętrznych
                  % (ciepło Joule'a)
```

Uruchomić skrypt. Powtórzyć punkty 4.3, 4.4.

4.6 Zmiana warunków brzegowych

Wyedytować plik skryptowy d1_iter.m. Zgodnie ze wskazówkami prowadzącego zmienić warunki brzegowe (temperatury) panujące na końcach rozpatrywanego obiektu (np.:

```
T = zeros(n+2,1000)+0.2; % temperatura na brzegach równa 0.2)
```

Uruchomić plik d1_iter.m. Powtórzyć punkty 4.3, 4.4.

4.7 Zmiana warunku początkowego

Wyedytować plik skryptowy d1_iter.m. Zgodnie ze wskazówkami prowadzącego zmienić warunek początkowy:

```
% warunek początkowy
for i=1:n+2;
    T(i,1) = 10*(sin(pi*x(i))+x(i)*(1-x(i)));
end
```

Uruchomić skrypt. Powtórzyć punkty 4.3, 4.4.

4.8 Zmiana rozdzielczości siatki przestrzennej

Wyedytować plik skryptowy d1_iter.m. Zgodnie ze wskazówkami prowadzącego zmienić rozdzielczość siatki przestrzennej np.:

```
n = 3;      % ilość punktów podziału przestrzennego
```

Uruchomić plik d1_iter.m. Powtórzyć punkty 4.3, 4.4

4.9 Wyznaczanie dokładnego rozwiązania dwuwymiarowego, ustalonego zagadnienia brzegowego

Problem dwuwymiarowego, ustalonego przepływu ciepła został przedstawiony w p. 2.2. W celu wizualizacji rozwiązania wprowadzić w oknie poleceń programu MATLAB wprowdzić polecenia:

```
>>d2_dokladne
```

4.10 Zmiana rozdzielczości siatki przestrzennej

Zgodnie ze wskazówkami prowadzącego zmodyfikować skrypt d2_dokladne.m:

```
N = 30 % rozdzielczość siatki przestrzennej (siatka kwadratowa)
```

Uruchomić skrypt.

4.11 Rozwiązanie numeryczne – metoda nadrelaksacji

W celu rozwiązania zagadnienia w oknie poleceń programu MATLAB wprowadzić:

```
>>d2_iter
```

Skrypt rozwiązuje rozpatrywane zagadnienie przy zadanych warunkach brzegowych.

4.12 Zmiana liczby iteracji i ocena zbieżności metody

Zgodnie ze wskazówkami prowadzącego zmodyfikować skrypt d2_iter.m, np..:

```
for k = 1:50          % liczba iteracji
```

Uruchomić skrypt dla k = 50, 200, 500. W celu oceny zbieżności, dla każdej wartości k wprowadzić następujące polecenie:

```
>>blad_srd = mean(mean(blad))
>>dokl_srd = mean(mean(T_num-T_dokl))
```

Pierwsze polecenie wyznacza średnią wartość różnicy pomiędzy wartością rozwiązania w kroku numer k i k-1. Jeśli metoda jest zbieżna wartość ta powinna maleć wraz ze wzrostem ilości iteracji. Drugie polecenie wyznacza średnią różnicę pomiędzy wartością rozwiązań: dokładnego i numerycznego. Zanotować wartości zmiennych blad_srd oraz dokl_srd dla poszczególnych k.

4.13 Zmiana rozdzielczości siatki przestrzennej

UWAGA: w każdym następnym punkcie uruchomienie skryptu d2_iter, powinno być poprzedzone wyczyszczeniem przestrzeni roboczej (polecenie `clear`).

Zgodnie ze wskazówkami prowadzącego zmodyfikować skrypt d2_iter.m, np..:

```
% liczba elementów siatki
nx = 30;
ny = 30;
```

Uruchomić skrypt.

4.14 Modyfikacje warunków brzegowych

Zgodnie ze wskazówkami prowadzącego zmodyfikować skrypt d2_iter.m, :

```
for i = 1:nx
    T(ny,i) = 20*sin(x(i))*sinh(2) % krawędź górna obszaru
end
```

Uruchomić skrypt. Zmienić warunek brzegowy:

```
for i = 1:nx
    T(ny,i) = 20 % krawędź górna obszaru
end
```

Uruchomić skrypt. Zmienić warunki brzegowe:

```
for i = 1:nx
    T(ny,i) = 0 % krawędź górna obszaru
end
for i = 1:ny
    T(i,1) = 20; % krawędź lewa obszaru
end
```

Uruchomić skrypt.

4.15 Wyznaczanie rozwiązania równania *Poissona* (równanie przewodnictwa przy istnieniu źródeł ciepła wewnątrz obszaru zagadnienia). Metoda nadrelaksacji.

Zgodnie ze wskazówkami prowadzącego zmodyfikować skrypt d2_iter.m:

1. Ustawić zerowe warunki początkowe.
2. Ustawić parametry siatki przestrzennej (nx = ny = 30).
3. Ustawić liczbę iteracji k = 1000
4. Włączyć (usunąć komentarz) w skrypcie linie:

```
% Wymuszenie
f = zeros(nx,ny);
f(14:16,14:16) = 2000
```

Powyższe linie ustalają parametry wewnętrznego źródła ciepła (wartość oraz współrzędne przestrzenne).

5. Uruchomić skrypt.
6. Zmodyfikować współrzędne źródła np.:

```
f(5:7,4:3) = 2000
```

7. Uruchomić skrypt.
8. Ustawić warunek początkowy, np.:

```
for i = 1:ny
    T(i,1) = 20; % krawędź lewa obszaru
end
```

9. Uruchomić skrypt. Zaobserwować zmiany pola temperatury wynikające z jednoczesnego występowania źródła ciepła i warunku brzegowego.

5. Opracowanie sprawozdania.

W sprawozdaniu należy umieścić wszystkie zarejestrowane wykresy wraz z opisami. Dodatkowo sprawozdanie powinno zawierać wnioski i spostrzeżenia.

ZADANIE: Wykorzystując skrypt d2_iter.m, zasymulować model dwuwymiarowego ustalonego przepływu ciepła z wewnętrznymi źródłami ciepła (równanie *Poissona)* dla czterech źródeł rozmieszczonych w rogach obszaru. Rozmiar źródeł: 2x2 elementy siatki przestrzennej, wydajność źródeł 500 W/m^2 (przewodność cieplna λ = 1). Wyniki symulacji dla dwóch siatek (nx=ny=15 i nx=ny=30) wraz z komentarzem zamieścić w sprawozdaniu.