Wydział Elektryczny
Zespół Automatyki (ZTMAiPC)
ZERiA

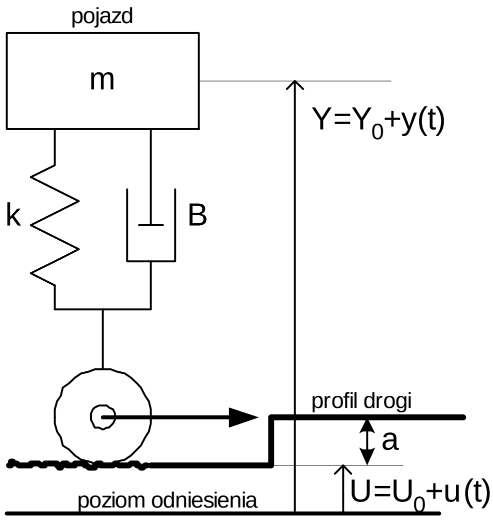
LABORATORIUM MODELOWANIA I SYMULACJI

Ćwiczenie 5

ANALIZA WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH WYBRANEGO OBIEKTU FIZYCZNEGO

1. Opis właściwości dynamicznych obiektu

Typowym obiektem dynamicznym, którego opis można przedstawić za pomocą liniowego równania różniczkowego jest układ zawieszenia pojazdu. Model blokowy tego układu przedstawia rysunek 1. Pojazd o masie *m* jest zawieszony nad profilem drogi za pośrednictwem dwóch elementów posiadających właściwości dynamiczne. Pierwszym z nich jest sprężyna, dla której zależność między siłą do niej przyłożoną, a jej odkształceniem wyraża się stałym współczynnikiem *k*. Drugim elementem jest tłumik olejowy, dla którego siła oporu przemieszczenia tłoka i prędkość jego przemieszczania powiązane są stałym współczynnikiem *B*.



Rys.1 . Model blokowy mechanicznego układu zawieszenia samochodu

m - masa pojazdu,
k – współczynnik sprężystości zawieszenia,
B – prędkościowy współczynnik tłumienia.

Po zsumowaniu wszystkich sił działających w układzie i przyjęciu poziomu odniesienia model układu z rys.1 można opisać równaniem:

$$m\cdot\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+B\left(\frac{dY(t)}{dt}-\frac{dU(t)}{dt}\right)+k\cdot\left(Y(t)-U(t)\right)=mg\,, \tag{1}$$

W stanie spoczynku położenie drogi nie zmienia się (przyjmijmy je na poziomie U_0). Nie zmienia się również położenie nadwozia (przyjmijmy je na poziomie Y_0). W stanie spoczynku także pochodne są równe zero, dlatego można zapisać:

$$k\cdot\left(Y_0-U_0\right)=mg\,, \tag{2}$$

Podstawiając $Y=Y_0+y(t)$, $U=U_0+u(t)$ oraz wzór (2) do równania (1) otrzymamy zależność zmian położenia nadwozia od zmian profilu drogi:

$$m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \cdot \frac{dy(t)}{dt} + k \cdot y(t) = B \cdot \frac{du(t)}{dt} + k \cdot u(t), \qquad (3)$$

Równie (3) opisuje dynamikę zawieszenia pojazdu.

2. Cel analizy modelu

Zadaniem zawieszenia jest kompensacja zmian profilu drogi *u(t)* tak, aby odczuwalne przemieszczenie nadwozia pojazdu *y(t)* dla pasażerów było możliwie jak najmniejsze.

W celu uproszenia analizy matematycznej przyjmiemy jeden z gorszych przypadków, kiedy droga zmienia profil skokowo o wartość *a* (Rys. 1). Wówczas zadaniem projektowym jest taki dobór współczynników *k* oraz *B* aby przebiegi czasowe odpowiedzi zawieszenia na wymuszenie skokowe o wysokości *a* były w pewien sposób optymalne. W tym przypadku jako kryterium optymalne przyjmiemy brak oscylacji nadwozia.

3. Program ćwiczenia

3.1. Opis układu w postaci transmitancji operatorowej

1. Na podstawie równania (3) wyznaczyć transmitancję operatorową układu G(s)=Y(s)/X(s).
2. Zasymulować działanie układu zawieszenia wprowadzając skrypt **zawieszenie1.m**:

```
clear all
clc

m=1000                      % mas pojazdu[kg]
B=200                       % współczynnik tłumienia [Ns/m]
k=20000                     % współczynnik sprężystości[N/m]
a=0.05                      % skokowa zmiana profilu drogi o 5 cm
licznik=[B/k,1];
mianownik=[m/k, B/k, 1]

sys=tf(licznik,mianownik)  % definicja systemu
figure(10)
pzmap(sys)                  % rozlokowanie zer i biegunów
hold on

figure(11)
step(a*sys)                 % odpowiedz skokowa
```

3. Czy odpowiedź układu ma charakter oscylacyjny?
4. Jaki wcześniej poznany system dynamiczny ma podobną odpowiedź skokową?

3.2. Warunki oscylacji

Charakter odpowiedzi skokowej systemu zależy od pierwiastków równania charakterystycznego, czyli w naszym przypadku od biegunów transmitancji układu.

1. Przyjmując m=1000 kg i k=20000 N/m wyznaczyć dla jakiej wartości B bieguny transmitancji badanego układu przyjmą wartości rzeczywiste.
2. Zasymulować działanie układu zawieszenia wprowadzając skrypt **zawieszenie2.m**:

```
clear all
clc

m=1000                      %masa pojazdu[kg]
k=20000                     %współczynnik sprężystości[N/m]
a=0.05                      % skokowa zmiana profilu drogi o 5 cm

B=sqrt(4*k*m)               %wartość graniczna B dla warunku oscylacji

licznik=[B/k,1];
mianownik=[m/k, B/k, 1]

sys=tf(licznik,mianownik) %definicja systemu
figure(10)
pzmap(sys)                  % rozlokowanie zer i biegunów
hold on

figure(11)
step(a*sys)                 % odpowiedz skokowa
```

3. Przyjmując B∈<3000;10000> wyznaczyć bieguny odpowiedzi skokowej układu. Zasymulować działanie układu zawieszenia wprowadzając skrypt **zawieszenie3.m**:

```
set(0,'DefaultAxesFontSize',12)
clear all
clc
figure(10);
clf
m=1000 %masa pojazdu[kg]
k=20000 %współczynnik sprężystości[N/m]
a=0.05 % skokowa zmiana profilu drogi o 5 cm

B=3000:3000:10000;
for i=1:max(size(B))
disp(['B= ',num2str(B(i))])
sys=tf([B(i)/k,1],[m/k, B(i)/k, 1])
sys_zpk=zpk(sys)
[zera,bieguny,wzmocnienie]=zpkdata(sys_zpk,'v')
figure(10);
pzmap(sys);
xlabel(['współczynnik tłumienia B=3000-10000']);
gtext(['B=',num2str(B(i))]);
hold on;
pause(0.2)
figure(10+i)
step(sys)
title(['współczynnik tłumienia B= ',num2str(B(i))]);

end
figure(10);
sgrid;
```

Na mapie zer i biegunów należy kliknąć obok pojawiających się nowych zer (o).
Na charakterystykach skokowych zaznaczyć czas regulacji, przeregulowanie, czas narastania.

3.3. Aproksymacja układem oscylacyjnym

Z uwagi na podobieństwo postaci mianownika transmitancji rozpatrywanego układu z układem oscylacyjnym o transmitancji:

$$G_{osc}(s)=\frac{\varpi_n^2}{s^2+2\cdot\varpi_n\cdot\xi\cdot s+\varpi_n^2} \tag{4}$$

gdzie ζ - względny współczynnik tłumienia, ω_n – pulsacja drgań niegasnących [rad/s] ($\omega_n=2\pi f$), można porównać parametry obydwu układów, a następnie wyznaczyć *B* oraz *k* na podstawie zadanej wartości ζ i ω_n.

Po przekształceniu transmitancji badanego systemu, tak aby wyraz wolny przy najwyższej potędze mianownika był równy 1 otrzymamy zależności:

$$2\cdot\varpi_n\cdot\xi=\frac{B}{m},\quad \varpi_n=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5}$$

Podejście takie, mimo że nie jest precyzyjne pozwala na oszacowanie parametrów *B*, *k* układu zawieszenia w sposób przybliżony na podstawie łatwo interpretowalnych parametrów ζ i ω_n.

1. Porównać odpowiedzi skokowe, rozkład zer i biegunów układu zawieszenia i układu oscylacyjnego wprowadzając skrypt **zawieszenie4.m**:

```
clear all
clc
m=1000
k=20000
zeta=.2:.6:2;
omegan=sqrt(k/m)

for i=1:max(size(zeta))
  B=2*m*zeta(i)*omegan;
  disp(['zeta= ',num2str(zeta(i))])
  disp(['B= ',num2str(B)])
  % aproksymacja parametrów układu zawieszenia układem oscylacyjnym
  disp('Układ zawieszenia ')
   sys=tf([B/k,1],[m/k, B/k, 1])
   sys_zpk=zpk(sys)
   [zera,bieguny,wzmocnienie]=zpkdata(sys_zpk,'v')
   figure(10);
   pzmap(sys);
   xlabel(['współczynnik tłumienia (zawieszenie) \zeta= ',num2str(zeta(i))]);
   gtext(['\zeta=',num2str(zeta(i))]);
   hold on;
   pause(0.2)
   figure(10+i)
   step(sys)
   title(['współczynnik tłumienia (zawieszenie) \zeta= ',num2str(zeta(i))]);

   %układ oscylacyjny
   disp('Układ oscylacyjny')
   sys2=tf([omegan],[1, 2*zeta(i)*omegan, omegan*omegan])
   sys2_zpk=zpk(sys2)
   [zera2,bieguny2,wzmocnienie2]=zpkdata(sys2_zpk,'v')

   figure(40);
   pzmap(sys2);
   xlabel(['współczynnik tłumienia (układ oscylacyjny)\zeta= ',num2str(zeta(i))]);
   gtext(['\zeta=',num2str(zeta(i))]);
   hold on;
   pause(0.2)
   figure(40+i)
   step(sys2)
   title(['współczynnik tłumienia (układ oscylacyjny) \zeta= ',num2str(zeta(i))]);

end
figure(10);
sgrid;
figure(40);
sgrid;
```

Na mapie zer i biegunów należy kliknąć obok pojawiających się nowych zer (o) lub biegunów(x).

2. Dla jakich wartości ζ różnice w odpowiedziach czasowych są znaczące? (na wykresach zaznaczyć czas regulacji, przeregulowanie, czas narastania)
3. Ocenić położenie zer i biegunów dla transmitancji układu zawieszenia w funkcji ζ.
4. Jaki efekt wywołuje zbliżenie zera z biegunem?

3.4. Charakterystyki częstotliwościowe układu

1. Porównać charakterystyki częstotliwościowe układu zawieszenia i układu oscylacyjnego wprowadzając skrypt **zawieszenie5.m**:

```
clear all
clc
m=1000;
k=20000;

zeta=.2:0.6:2;
czas=0:.1:2;

for i=1:max(size(zeta))
   omegan=sqrt(k/m);
   B=2*m*zeta(i)*omegan;
   % aproksymacja parametrów układu zawieszenia układem oscylacyjnym
   sys=tf([B/k,1],[m/k, B/k, 1]);
   figure(10);
   pzmap(sys);
   xlabel(['współczynnik tłumienia (zawieszenie) \zeta= ',num2str(zeta(i))]);
   gtext(['\zeta=',num2str(zeta(i))]);
   hold on;
   pause(0.2)
   figure(10+i)
   grid on
   bode(sys)
   grid on
   title(['współczynnik tłumienia (zawieszenie) \zeta= ',num2str(zeta(i))]);

   %układ oscylacyjny
   sys2=tf([omegan],[1, 2*zeta(i)*omegan, omegan*omegan]);
   figure(40);
   pzmap(sys2);
   xlabel(['współczynnik tłumienia (układ oscylacyjny)\zeta= ',num2str(zeta(i))]);
   gtext(['\zeta=',num2str(zeta(i))]);
   hold on;
   pause(0.2)
   figure(40+i)
   grid on
   bode(sys2)
   grid on
   title(['współczynnik tłumienia (układ oscylacyjny) \zeta= ',num2str(zeta(i))]);

end
figure(10);
sgrid;
figure(40);
sgrid;
```

Na mapie zer i biegunów należy kliknąć obok pojawiających się nowych zer (o) lub biegunów(x).