Wydział Elektryczny
Zespół Automatyki (ZTMAiPC)
ZERiA

LABORATORIUM MODELOWANIA I SYMULACJI

Ćwiczenie 3

MODELOWANIE SYSTEMÓW DYNAMICZNYCH METODY OPISU MODELI UKŁADÓW

I. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z opisem modeli układów w środowisku Matlab.

II. Wprowadzenie - Modele systemów dynamicznych badanych w programie ćwiczenia

Równanie różniczkowe

Rozważmy dwa systemy dynamiczne opisane równaniami różniczkowymi:

$$a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = k_0 \cdot u(t), \quad \frac{dy(0)}{dt} = y_1, \quad y(0) = y_0, \tag{1}$$

$$a_2 \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = k_1 \cdot \frac{du(t)}{dt} + k_0 \cdot u(t), \qquad \frac{d^2y(0)}{dt^2} = y_2, \quad \frac{dy(0)}{dt} = y_1, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

u(t) jest sygnałem wejściowym systemów, *y(t)* jest sygnałem odpowiedzi systemów na *u(t)*, $y_1 ... y_2$ są warunkami początkowymi, czyli wartościami funkcji *y(t)* i jej pochodnych od których startuje odpowiedź systemów. Współczynniki $a_0 ... a_2$ oraz $k_0 ... k_1$ określają parametry systemów i ich wartości podane zostaną w trakcie realizacji ćwiczenia.

Transmitancja operatorowa

Transmitancją Laplace'a liniowego układu jest stosunek transformat Laplace'a sygnału wyjściowego Y(s) do wejściowego U(s) przy zerowych warunkach początkowych.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} \tag{3}$$

W punkcie (3) przedstawiona została zasada zapisu transmitancji układu w postaci współczynników wielomianu licznika (**num** w polu struktury systemu) i mianownika (**den** w polu struktury systemu). Inną formą zapisu transmitancji jest podanie pierwiastków wielomianów licznika i mianownika transmitancji. Pierwiastki zerujące wielomian licznika transmitancji to **zera (ang. zeros)**. Pierwiastki zerujące wielomian mianownika transmitancji to **bieguny** (**ang**. **poles**). Bieguny to także pierwiastki równania charakterystycznego równania różniczkowego, zatem widząc zapis zer i biegunów transmitancji można często bardzo szybko określić własności systemu dynamicznego. Jest to jeden z powodów dlaczego zapis ten jest ważny.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m}{a_n} \frac{(s - z_1)(s - z_2)...(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)...(s - p_n)} \tag{4}$$

gdzie: $z_1, z_2, \ldots z_m$ - zera transmitancji (pierwiastki wielomianu licznika)
$p_1, p_2, \ldots p_n$ - bieguny transmitancji (pierwiastki wielomianu mianownika)

Opis układu w przestrzeni stanów

Sposoby opisu układów dynamicznych przedstawione poprzednio mają niestety wadę. Aby je zastosować należy przyjąć warunki początkowe równań (1) i (2) **równe zero**. Stwarza to ograniczenie, np. przy modelowaniu działania silnika, gdzie należy założyć, że w chwili początkowej prędkość obrotowa wału jest równa zero. Tego ograniczenia nie ma zapis modelu systemu dynamicznego w postaci układu równań różniczkowych:

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u}(t) \quad \text{- równanie stanu}$$
$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{u}(t) \quad \text{- równanie wyjścia} \tag{5}$$

Pogrubienie symboli oznacza, że mamy do czynienia z wektorami. Zmienna ***x(t)*** jest tzw. **wektorem zmiennych stanu.** Należy zauważyć, że w równaniu (5) występuje tylko pochodna pierwszego rzędu, zatem rozwiązanie takiego równania sprowadza się do rozwiązania równania pierwszego rzędu przy zadanych warunkach początkowych. Dla systemów wyższych rzędów trzeba rozwiązać układ kilku równań pierwszego rzędu z warunkami początkowymi odpowiednio dla każdej zmiennej stanu *x(t)*. Na przykład: aby uzyskać zapis równania 6 rzędu w postaci zmiennych stanu, należy tak je przekształcić, aby uzyskać 6 równań różniczkowych pierwszego rzędu. Przy rozwiązaniu każdego z nich uwzględnia się odpowiednie warunki początkowe.

Charakterystyki czasowe

Charakterystyką czasową układu nazywa się przebieg w czasie odpowiedzi (wyjścia) układu na określony standardowy sygnał wejściowy, podany na wejście układu będącego w stanie równowagi. W zależności od rodzaju zastosowanego sygnału wejściowego $x(t)$ wśród charakterystyk czasowych można rozróżnić następujące:

- Charakterystyka skokowa $h(t)$
- Charakterystyka impulsowa $g(t)$
- Charakterystyka liniowo-czasowa $v(t)$

Charakterystyki częstotliwościowe (charakterystyki Bode'go)

Charakterystyka częstotliwościowa opisuje odpowiedź układu na wymuszenie harmoniczne (sinusoidalne) o częstotliwości zmieniającej się w określonym zakresie. Jeżeli zmiany amplitudy i fazy zostaną zarejestrowane dla wejściowego sygnału harmonicznego o częstotliwości nastawianej w szerokim zakresie (teoretycznie w zakresie $0\leq\omega\leq\infty$), to uzyska się **charakterystyki częstotliwościowe** układu:

- charakterystykę amplitudową $A(\omega)$
- charakterystykę fazową $\varphi(\omega)$

III. Program ćwiczenia:

1. Metody opisu systemów dynamicznych

1.1. Zapis w formie transmitancji

1. Dla wartości $a_0=1$, $a_1=4$, $k_0=5$ wyprowadzić transmitancję równania (1). Zwrócić uwagę na zerowe warunki początkowe.

Wprowadzić skrypt **`sysdef1.m`**

```
%metody definiowania systemów dynamicznych
%skrypt sysdef1.m
clc      %czyszczenie ekranu
         %system_nr_1_trans
k0=5
a0=1
a1=4
licznik_system_nr_1=[k0];           % licznik transmitancji systemu nr 1
mianownik_system_nr_1=[a1 a0];      % mianownik transmitancji systemu nr 1 (a1*s+a0)
system_nr_1_trans=tf(licznik_system_nr_1,mianownik_system_nr_1); %transmitancja
disp('to jest system dynamiczny o transmitancji:')
system_nr_1_trans
```

Uruchomić skrypt i zapisać wyniki.

2. Sprawdzić strukturę zbudowanego systemu z okna Command Window programu MATLAB:

```
get(system_nr_1_trans)       %pokazuje strukturę systemu
[licznik,mianownik]=tfdata(system_nr_1_trans,'v')    % pokazuje współczynniki
                                                      % wielomianów transmitancji
```

3. Dla wartości $a_0 =1$, $a_1 =4$, $a_2 =8$, $k_0=5$, $k_1 =6$, wyprowadzić transmitancję równania (2). Zwrócić uwagę na zerowe warunki początkowe.

Wprowadzić skrypt **sysdef2.m**

```
%metody definiowania systemów dynamicznych
%skrypt sysdef2.m
clc    %czyszczenie ekranu
        %system_nr_2_trans
k0=5
k1=6
a0=1
a1=4
a2=8
licznik_system_nr_2=[k1 k0];        % licznik transmitancji systemu nr 2
mianownik_system_nr_2=[a2 a1 a0];   % mianownik transmitancji systemu nr 2 (a1*s+a0)
system_nr_2_trans=tf(licznik_system_nr_2,mianownik_system_nr_2); %transmitancja
system_nr_2_trans
```

Uruchomić skrypt i zapisać wyniki.

4. Sprawdzić strukturę zbudowanego systemu z okna Command Window programu MATLAB:

```
get(system_nr_2_trans)    % pokazuje strukturę systemu
[licznik,mianownik]=tfdata(system_nr_2_trans,'v')    % pokazuje współczynniki
                                                      % wielomianów transmitancji
```

1.2. Postać zer i biegunów

1. Dla transmitancji systemów (1) i (2) wyliczyć pierwiastki licznika i mianownika oraz współczynnik wzmocnienia

oraz

2. Zamienić transmitancję systemu z postaci wielomianowej na postać zero-biegunową korzystając z instrukcji programu MATLAB wprowadzając w oknie poleceń następujące instrukcje:

```
system_nr_1_zpk =zpk(system_nr_1_trans)   % zamiana zapisu struktury systemu z
                                           % wielomianowego na zero-biegunowy
get(system_nr_1_zpk)    % pokazuje strukturę systemu
system_nr_1_zpk.z{:}    % pokazuje zera
system_nr_1_zpk.p{:}    % pokazuje bieguny
system_nr_1_zpk.k        % pokazuje wzmocnienie
[zera,bieguny,wzmocnienie]=zpkdata(system_nr_1_zpk,'v')
```

oraz

```
system_nr_2_zpk =zpk(system_nr_2_trans)
get(system_nr_2_zpk)    %pokazuje strukturę systemu
system_nr_2_zpk.z{:}    % pokazuje zera
system_nr_2_zpk.p{:}    % pokazuje bieguny
system_nr_2_zpk.k       % pokazuje wzmocnienie
[zera,bieguny,wzmocnienie]=zpkdata(system_nr_2_zpk,'v')
```

3. Narysować mapę zer i biegunów dla systemów 1 i 2:

```
pzmap(system_nr_1_trans)
title ('kolka to zera a krzyzyki to bieguny - kliknij na nie myszką')
```

oraz

```
pzmap(system_nr_2_trans)
title ('kolka to zera a krzyzyki to bieguny - kliknij na nie myszką')
```

1.3. Postać zmiennych stanu

1. Dla systemów (1) i (2) wyznaczyć równania zmiennych stanu przez przekształcenie struktury transmitancji układu na strukturę zapisu w postaci zmiennych stanu.

```
system_nr_1_zmst=ss(system_nr_1_zpk)      % z postaci zero-biegunowej
system_nr_2_zmst=ss(system_nr_2_trans)    % z postaci wielomianowej
```

1.4. Charakterystyki czasowe systemów dynamicznych

Odpowiedzi systemów dynamicznych na zadane sygnały w dziedzinie czasu.

1. Odpowiedzi na impuls Diraca, skok jednostkowy oraz przebieg sinusoidalny.

```
impulse(system_nr_1_trans)                    % odpowiedź impulsowa systemu(1)
impulse(system_nr_1_trans,system_nr_2_trans) % odpowiedź impulsowa systemów (1)i(2)
impulse(system_nr_1_trans+system_nr_2_trans)    % odpowiedź impulsowa systemów (1) i
                                                % (2) połączonych równolegle
impulse(system_nr_1_trans*system_nr_2_trans)    % odpowiedź impulsowa systemów (1) i
                                                % (2) połączonych szeregowo
```

2. Odpowiedzi na skok jednostkowy

```
step(system_nr_1_trans)                     % odpowiedź skokowa systemu(1)
step(system_nr_1_trans,system_nr_2_trans)    % odpowiedź skokowa systemów (1) i (2)
step(system_nr_1_trans+system_nr_2_trans)    % odpowiedź skokowa systemów (1) i (2)
                                             % połączonych równolegle
step(system_nr_1_trans*system_nr_2_trans)    % odpowiedź impulsowa systemów (1) i
                                             % (2) połączonych szeregowo
```

3. Symulacja działania układu na zadane wymuszenie, np. liniowo narastające

```
t=0:0.01:40;
u=0.2*t;

[y1,t1]=lsim(system_nr_1_trans,u,t);
plot(t1,y1,'k',t,u,'b:')     % skopiuj wykres

[y2,t2]=lsim(system_nr_2_trans,u,t);
plot(t2,y2,'k',t,u, 'b:')     % skopiuj wykres

[y1,t]=lsim(system_nr_1_zmst,u,t);
plot(t1,y1,'k',t,u,'b:')     % skopiuj wykres

[y2,t2]=lsim(system_nr_2_zmst,u,t);
plot(t2,y2,'k',t,u, 'b:')     % skopiuj wykres
```

1.5. Charakterystyki częstotliwościowe systemów dynamicznych

1. Dla systemów (1) i (2) wyznaczyć charakterystyki Bode'go

```
grid on
bode(system_nr_1_trans)     % charakterystyka Bodego systemu(1)

grid on
bode(system_nr_2_trans)     % charakterystyka Bodego systemu(2)

grid on
bode(system_nr_1_trans,system_nr_2_trans)  % charakterystyka Bodego systemów (1)i(2)
grid on
bode(system_nr_1_trans+system_nr_2_trans)  % charakterystyka Bodego systemów (1)i(2)
                                            % połączonych równolegle
grid on
bode(system_nr_1_trans*system_nr_2_trans)   % charakterystyka Bodego systemów (1)i(2)
                                            % połączonych szeregowo
```

Literatura

1. B. Mrozek, Z. Mrozek: *MATLAB i Simulink: poradnik użytkownika*. Helion, Gliwice, 2004.
2. A. Zalewski, R. Cegieła: *Matlab - obliczenia numeryczne i ich zastosowania*.Wydawnictwo Nakom, Poznań, 2000.
3. J. Brzózka, L. Dorobczyński: *Programowanie w Matlab*. Wydawnictwo Mikom,Warszawa, 1998.