

**Wydział Elektryczny**  
**Zespół Automatyki (ZTMAiPC)**

## KOMPUTERY W STEROWANIU

### Ćwiczenie 4 Dyskretne układy liniowe

#### 1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest ilustracja zagadnień związanych z opisem i badaniem podstawowych właściwości dyskretnych układów liniowych oraz wykorzystaniem równań różnicowych do badania ciągłych układów dynamicznych, w szczególności układów regulacji ze sprzężeniem zwrotnym.

#### 2. Wprowadzenie

##### 2.1. Funkcje dyskretne i równania różnicowe

Funkcją dyskretną  $f_d$  nazywamy funkcję nieciągłą, której wartości rozpatrywane są jedynie w momentach  $t = nT_s$  nazywanych chwilami próbkowania (rys.1), gdzie  $n$  jest liczbą całkowitą, a  $T_s$  - okresem próbkowania (impulsowania):

$$f_d(t) = \begin{cases} f(nT_s) & \text{dla } t = nT_s, \\ 0 & \text{dla } t \neq nT_s \end{cases} \quad (1)$$

Funkcję dyskretną (1) można sprowadzić do funkcji o okresie próbkowania równym jedności poprzez zmianę skali czasu:  $t^* = t/T_s$ .

Wówczas dla  $t^* = n$  mamy:

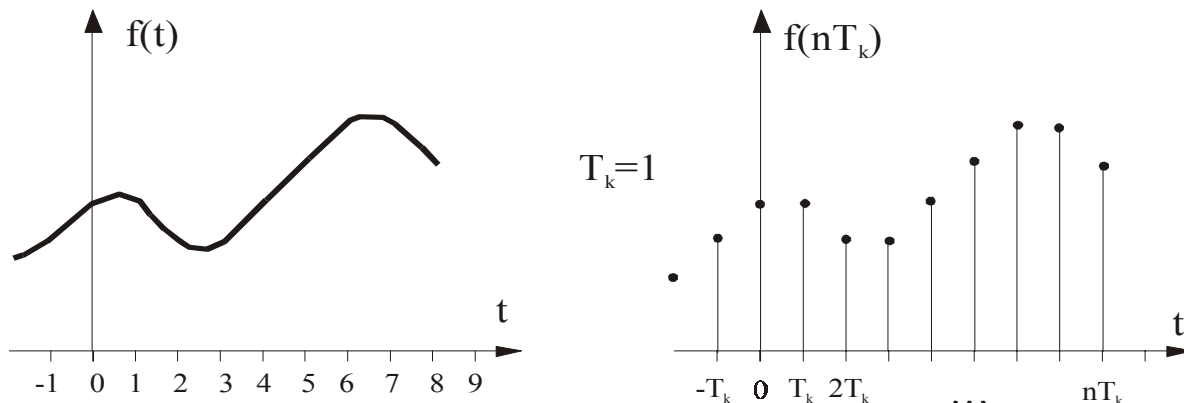
$$f_d(t^*) = f(n) \quad (2)$$

Różnica pierwszego rzędu  $\Delta f(n)$  funkcji dyskretnej  $f(n)$  w punkcie  $n \in \mathbb{C}$  określona jest w sposób następujący:

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) \quad (3)$$

Różnicę  $k$ -tego rzędu  $\Delta^k f(n)$  określa się indukcyjnie:

$$\Delta^k f(n) = \Delta^{k-1} f(n+1) - \Delta^{k-1} f(n), \quad k = 2, 3, \dots \quad (4)$$



Rys.1. Funkcja ciągła i dyskretna,  $T_k$  – okres prókowania

W związku z tym różnicę  $k$ -tego rzędu w chwili  $n$  można wyrazić jako kombinację przesuniętych w czasie wersji sygnału dyskretnego:

$$\Delta^k f(n) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{k!}{(k-i)! i!} f(n+i), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Dynamikę liniowego układu dyskretnego z wejściem  $x$  i wyjściem  $y$  opisuje się za pomocą liniowego równania różnicowego:

$$\sum_{k=0}^p a_k y(n+k) = \sum_{k=0}^q b_k x(n+k), \quad (6)$$

gdzie:  $a_p \neq 0, b_q \neq 0, p \geq q$  (liczbę  $p$  nazywamy rzędem równania). Dyskretny czas  $n$  można interpretować jako indeks próbki sygnału wejściowego lub wyjściowego.

### 2.2. Przekształcenie Z i transmitancja dyskretna

Jednostronną transformatę Z funkcji dyskretniej  $\{f(kT_s): k = 0, 1, 2, \dots\}$  definiuje się jako

$$Z [ f ( kT_s ) ] = F ( z ) = \sum_{k=0}^{\infty} f ( kT_s ) z^{-k} \quad (7)$$

gdzie  $z$  jest zmienną zespoloną.

Transmitancją dyskretną  $G(z)$  dyskretnego układu (członu) liniowego (rys. 2a) nazywać będziemy stosunek transformaty Z dyskretniej odpowiedzi  $y(n), n \geq 0$  do transformaty Z dyskretnego wymuszenia  $x(n), n \geq 0$  przy zerowych warunkach początkowych:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad (8)$$

gdzie:  $Y(z) = Z[y(n) \mathbb{1}(n)], X(z) = Z[x(n) \mathbb{1}(n)]$  są odpowiednio transformatami dyskretniej odpowiedzi i dyskretnego wymuszenia pomnożonych przez funkcję dyskretnego skoku jednostkowego  $\mathbb{1}(n)$  w celu wyzerowania funkcji dla  $n < 0$  (przyjęto  $T_s = 1$ ).

Dowodzi się następujących dwóch twierdzeń granicznych dla transformat  $Z[f(n)]$  funkcji dyskretnej:

$$\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = \lim_{z \rightarrow \infty} Z[f(n)] \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Z[f(n)]$$

Zachodzi też następująca własność przesunięcia:

$$Z[f(n-k)] = z^{-k} F(z)$$

Dyskretną charakterystyką (odpowiedzią) skokową  $h(n), n \geq 0$  układu dyskretnego nazywamy dyskretną odpowiedź na wymuszenie w postaci dyskretnego skoku jednostkowego  $x(n) = 1(n)$  przy zerowych warunkach początkowych ( $Z[1(n)] = z/(z-1)$ )

Dyskretną charakterystyką impulsową  $g(n), n \geq 0$  układu dyskretnego nazywamy dyskretną odpowiedź na wymuszenie w postaci dyskretnego impulsu jednostkowego  $x(n) = \delta(n)$  (jest to impuls o jednostkowej amplitudzie dla  $n = 0$ ) przy zerowych warunkach początkowych ( $Z[\delta(n)] = 1$ ).

### 2.3. Odwrotne przekształcenie Z

#### 2.3.1. Metoda rozkładu na ułamki proste

Jeśli funkcja  $F(z)$  da się przedstawić w postaci sumy ułamków prostych

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) + F_3(z) + \dots \tag{9}$$

to dyskretny przebieg czasowy (transformatę odwrotną  $Z^{-1}$ ) można znaleźć odszukując w tablicach transformaty odwrotne ułamków prostych  $F_1(z), F_2(z), \dots$ , itd.

#### 2.3.2. Metoda wzoru całkowego.

Funkcję dyskretną można wyliczyć bezpośrednio z definicji odwrotnego przekształcenia  $Z^{-1}$ :

$$f(nT_k) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz = \sum \text{res } F(z) z^{n-1} \tag{10}$$

gdzie całkowanie odbywa się po okręgu wewnątrz którego znajdują się wszystkie punkty osobliwe.

#### 2.3.3. Metoda rozwinięcia w szereg potęgowy (dzielenia wielomianów).

Jeżeli funkcja  $F(z)$  jest funkcją wymierną zmiennej "z"

$$F(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_n z^{-n}}{p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_n z^{-n}},$$

to dzieląc licznik przez mianownik otrzymujemy kolejne :

$$F(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_n z^{-n}}{p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_n z^{-n}} = f(0T_k) + f(1T_k)z^{-1} + f(2T_k)z^{-2} + \dots \tag{11}$$

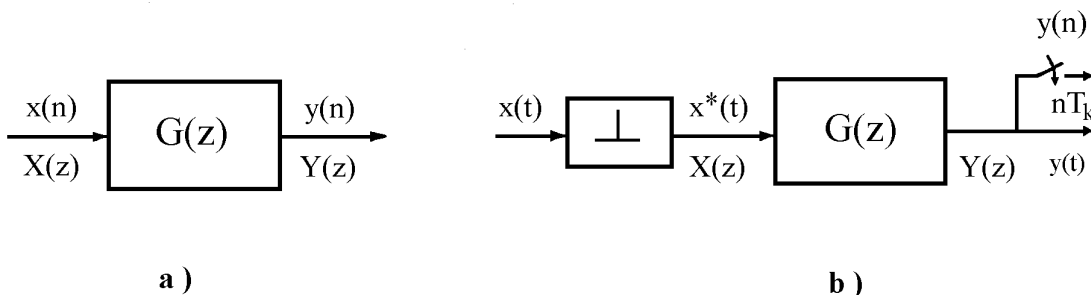
### 2.4. Układy impulsowe

Weźmy pod uwagę układ liniowy ciągły, na wejściu którego znajduje się idealny impulsator (rys. 2b), przekształcający wymuszenie ciągłe  $x(t)$  w ciąg impulsów Diraca w dyskretnych chwilach  $t = nT_s$ :

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \tag{12}$$

o polach równych wartościom funkcji  $x(nT_s)$ . Między transformatą Laplace'a  $X^*(s)$  sygnału impulsowego  $x^*(t)$ , a transformatą Z dyskretnego sygnału  $X(z) = X(nT_s)$  zachodzi zależność:

$$X^*(s) \Big|_{e^{sT_s} = z} = X(z) \tag{13}$$



Rys.2. Układ dyskretny (a) i impulsowy (b)

Zależność ta określa związek dynamiki układu z impulsatorem przy wymuszeniu  $x(t)$  z dynamiką układu dyskretnego przy wymuszeniu  $x(n) = x(nT_s)$ . W przypadku ogólnym odpowiedź  $y(t)$  jest ciągłą funkcją czasu ( obiekt  $G(z)$  zawiera część ciągłą), a transformatę Z odpowiedzi oblicza się ze wzoru  $Y(z) = Z \left[ y(t) \Big|_{t=nT_s} \right]$ .

Rozpatrzmy układ impulsowy przedstawiony na rys. 3, w którym:

- $x(t), e(t), y(t)$  - sygnały ciągłe,  $T_k$  – okres prókowania
- $I$  - idealny impulsator zmieniający sygnał uchybu  $e(t)$  na ciąg impulsów Diraca

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT_k) \delta(t - nT_k) , \tag{14}$$

$E(s)$  - transmitancja ekstrapolatora zerowego rzędu (ZOH) zmieniającego ciąg impulsów Diraca na funkcję schodkową,  $G_o(s), H(s)$  - transmitancje układów ciągłych.

Przy analizie tego typu układu używa się transmitancji impulsowych zdefiniowanych w sposób następujący:

- transmitancja wiążąca uchyb z wyjściem:

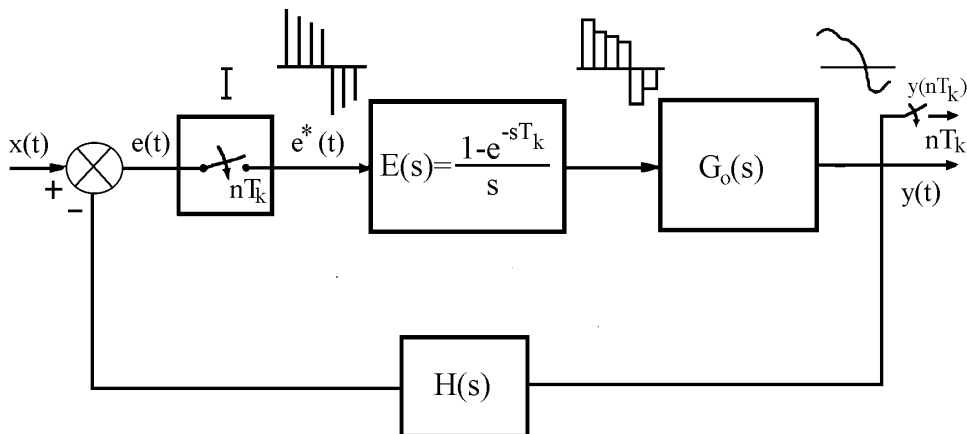
$$G(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} , \tag{15}$$

- transmitancja układu zamkniętego:

$$G_z(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{G(z)}{1 + W(z)} , \tag{16}$$

gdzie  $W(z) = Z \{ L^{-1} [ E(s) G_o(s) H(s) ] \Big|_{t=nT_k} \}$ ,

( $\mathbf{L}^{-1}$  – odwrotne przekształcenie Laplace’a).



Rys.3. Impulsowy układ dynamiczny ze sprzężeniem zwrotnym

- transmitancja uchybowa:

$$G_e(z) = \frac{E(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + W(z)}, \quad (17)$$

$X(z), E(z), Y(z)$  są odpowiednio transformatami  $Z$  funkcji dyskretnych  $x(nT_k), e(nT_k), y(nT_k), n \geq 0$ . Transmitancje impulsowe (15) - (17) są zależne od okresu impulsowania  $T_k$ . Transmitancję (15), czyli dyskretny odpowiednik transmitancji ciągłej  $G_0(s)$  w sensie równoważności odpowiedzi na wymuszenie schodkowe, można zapisać w następujący sposób:

$$G(z) = Z\{L^{-1}[E(s)G_0(s)]|_{t=nT_k}\} = \frac{z-1}{z} Z\{L^{-1}\left[\frac{1}{s}G_0(s)\right]|_{t=nT_k}\} \quad (18)$$

$G(z)$  opisana zależnością ma w chwilach próbkowania takie same wartości sygnału wyjściowego jak  $G_0(s)$ , a więc przy sterowaniu ciągłego obiektu z ekstrapolatora ZOH odpowiedniość transmitancji jest dokładna. Wykorzystując wzory (15) - (18) można badać układ impulsowy w dyskretnych chwilach czasu  $t = nT_k, n \geq 0$  tak, jak to się robi w przypadku typowych układów dyskretnych.

Dyskretnym układem regulacji nazywa się taki układ, w którym sygnał uchybu jest wyznaczany i przetwarzany w dyskretnych, na ogół równoodległych, chwilach czasu. Ponieważ informacja o uchybie nie jest podawana nieprzerwanie, jakość dyskretnych układów regulacji może być niższa niż ciągłych o analogicznej złożoności algorytmu regulacji. Własności układów dyskretnych zależą przy tym silnie od okresu próbkowania  $T_k$ .

## 2.5. Dyskretyzacja ciągłych układów dynamicznych.

Ciągły układ dynamiczny z wejściem  $x$  i wyjściem  $y$  opisany równaniem różniczkowym:

$$\sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^q b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}, \quad t \in R \quad (19)$$

można, po dyskretyzacji sygnałów w czasie i aproksymacji  $d^i y / dt^i \approx \Delta^i y(n)$   $i$ -tych pochodnych różnicami  $i$ -tego rzędu, zapisać w postaci równania różnicowego dla  $t = nT_s$ :

$$\sum_{i=0}^p a_i \frac{\Delta^i y(nT_s)}{T_s^i} = \sum_{i=0}^q b_i \frac{\Delta^i x(nT_s)}{T_s^i}, \quad n \in C \quad (23)$$

Dokładność tego przybliżenia rośnie, gdy okres próbkowania  $T_k$  maleje. Korzystając z zależności (5) równanie (23) można więc przekształcić do równoważnego równania różnicowego:

$$\sum_{k=0}^p c_k y(n+k) = \sum_{k=0}^q d_k x(n+k), \quad (24)$$

gdzie współczynniki  $c_k$  i  $d_k$  są określone przez wzory wynikające z przekształcenia (23) na (24).

Dla danego układu dynamicznego znane są współczynniki  $c_k$  i  $d_k$  równania (24). Rozwiązanie równania różnicowego przy zadanej funkcji wymuszającej  $x(n)$  polega na wyznaczeniu wartości funkcji  $y(n)$  dla wszystkich  $n \geq 0$ . Warunki początkowe podaje się w postaci  $p$  wartości funkcji  $y(n)$  w chwilach  $y(-p)$ ,  $y(-p+1)$ , ...,  $y(-1)$ .

Powyższa metoda aproksymacji układu analogowego jego dyskretnym odpowiednikiem nazywa się metodą Eulera (prostokątów) i odpowiada rozwinięciu w szereg:

$$z = e^{sT_k} \approx 1 + sT_k$$

Alternatywną metodą o lepszych właściwościach ale wymagającą większego nakładu obliczeniowego, jest aproksymacja Tustina (metoda trapezów, odwzorowanie biliniowe)

$$z = e^{sT_k} \approx \frac{1 + sT_k/2}{1 - sT_k/2}$$

Transmitancję dyskretną  $G(z)$  otrzymuje się przez zastąpienie argumentu  $s$  w transmitancji ciągłej  $G_a(s)$  przez „ $s'$ ”, gdzie:

$$s' = \frac{z-1}{T_k} \quad (\text{metoda Eulera}) \quad \text{lub} \quad s' = \frac{2}{T_k} \frac{z-1}{z+1} \quad (\text{metoda trapezów})$$

i wtedy  $G(z) = G_a(s')$ . Przy zastosowaniu metody Eulera stabilny układ ciągły może być odwzorowany w niestabilny układ dyskretny. Aproksymacja Tustina zachowuje własność stabilności, ponieważ odwzorowuje lewą półpłaszczyznę „ $s$ ” w okrąg jednostkowy „ $z$ ”.

## 2.6. Charakterystyki częstotliwościowe układu dyskretnego

Dyskretną transmitancją widmową  $G(e^{j\Omega})$  układu dyskretnego nazywamy stosunek wartości zespolonej amplitudy składowej wymuszonej odpowiedzi  $\bar{y}(n)$  wywołanej wymuszeniem sinusoidalnym  $\bar{x}(n)$  do wartości zespolonej amplitudy tego wymuszenia.

Dyskretne wymuszenie sinusoidalne  $x(n) = X \sin(n\Omega)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  można w postaci zespolonej zapisać następująco:

$$\bar{x}(n) = X e^{jn\Omega}, \quad (25)$$

gdzie  $\Omega = \omega T_s = 2\pi \frac{f}{f_s}$  jest bezwymiarową pulsacją unormowaną do częstotliwości próbkowania  $f_s$  [Hz], a  $x(n) = \text{Im}[\bar{x}(n)]$ . Na wyjściu układu dyskretnego obserwuje się wymuszoną odpowiedź  $y(n) = Y \sin(n\Omega + \varphi)$ , gdzie:

$$Y = |G(e^{j\Omega})| X, \quad \varphi = \arg(G(e^{j\Omega})).$$

Wykres dyskretnej transmitancji widmowej  $G(e^{j\Omega}) = U(\Omega) + jV(\Omega)$  na płaszczyźnie zespolonej w funkcji  $\Omega$  nazywa się charakterystyką amplitudowo-fazową układu dyskretnego. Charakterystyka  $G(e^{j\omega\Omega})$  jest okresową funkcją  $\Omega$ , ponieważ  $e^{j\Omega} = e^{j(\Omega + 2k\pi)}$ . Zachodzi związek:

$$G(e^{j\omega}) = G(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_s}} \quad (26)$$

Wykresy  $|G(e^{j\Omega})|$  oraz  $\varphi = \arg[G(e^{j\Omega})]$  nazywane są odpowiednio amplitudową i fazową charakterystyką częstotliwościową układu dyskretnego.

Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu dyskretnego jest transformatą Fouriera jego dyskretnej odpowiedzi impulsowej  $g(n)$ :

$$G(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) e^{-jn\Omega}. \quad (27)$$

Zależność ta pozwala w przybliżeniu obliczać  $G(e^{j\Omega})$  dla skończonego ciągu próbek odpowiedzi impulsowej układu.

Jeżeli rozpatruje się układ impulsowy z rys. 2b poddany wymuszeniu sinusoidalnemu  $x(t) = X \sin \omega t$ , to w chwilach próbkowania  $t = nT_s$  postać zespolona wymuszenia jest następująca:  $\bar{x}(n) = X e^{jn\omega T_s}$ .

## 2.7. Stabilność układu dyskretnego.

Liniowy układ dyskretny nazywa się stabilnym asymptotycznie, jeżeli wartości dyskretnej składowej przejściowej  $y_p(n)$  odpowiedzi maleją do zera przy  $n \rightarrow \infty$ . Mówi się też, że układ jest stabilny, jeżeli każdemu ograniczonemu dyskretnemu sygnałowi wejściowemu  $x(n)$ ,  $n \geq 0$ :  $\exists(X \in \mathbb{R}) \quad \forall(n \geq 0) \quad |x(n)| \leq X$  odpowiada ograniczony sygnał wyjściowy  $y(n)$ ,  $n \geq 0$ , tzn.  $\exists(Y \in \mathbb{R}) \quad \forall(n \geq 0) \quad |y(n)| \leq Y$ .

Warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności asymptotycznej liniowego układu dyskretnego jest to, żeby bieguny jego transmitancji dyskretnej

$$G(z) = \frac{L(z)}{M(z)}, \quad (28)$$

czyli pierwiastki równania charakterystycznego  $M(z)=0$ , spełniały warunek  $|z_i| < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , gdzie  $k$  jest stopniem wielomianu  $M$ . Pierwiastki muszą więc leżeć wewnątrz okręgu jednostkowego o środku w początku układu współrzędnych płaszczyzny zespolonej.

Przy pomocy odwzorowania biliniowego  $z = (w+1)/(w-1)$  obszar  $|z| \leq 1$  można przekształcić w obszar  $\operatorname{Re}(w) \leq 0$ . Zastosowanie w  $M(z)$  takiego podstawienia umożliwia badanie stabilności układu dyskretnego przy pomocy kryteriów stosowanych do badania układów ciągłych, np. kryterium Routha-Hurwitza. Stabilność zamkniętych układów dyskretnych można badać na podstawie danej charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego w oparciu o kryterium Nyquista.

### 3. Program ćwiczenia

Uruchomić program MATLAB z poziomu MS Windows a następnie uruchomić symulator układów dynamicznych SIMULINK:

```
>> simulink
```

Z menu **File/Open** wywołuje się kolejne modele układów dyskretnych, np. `dinerc.m`. Symulację uruchamia (przerzywa) Ctrl+T lub polecenie **Start/Stop** z menu **Simulation**. Wykresy drukuje się poleceniem **Print** z menu **File** okna wykresów. Parametry poszczególnych bloków można modyfikować w oknie parametrów po dwukrotnym kliknięciu myszą na wybranym bloku schematu.

**Uwaga:** Blok *Transfer Fcn S-to-Z-domain* z biblioteki *Discrete* umożliwia automatyczną dyskretyzację transmitancji ciągłej  $G(s)$ , tzn. obliczenie parametrów jej dyskretnego odpowiednika  $G_d(z)$  dla zadanej metody (np. po każdej zmianie okresu próbkowania T):

zoh -	równoważności odpowiedzi na wymuszenie schodkowe (ekstrapolacja 0 rzędu),
foh -	równoważności odpowiedzi na wymuszenie kawałkami liniowe (ekstrapolacja I rzędu),
tustin -	metoda Tustina (inaczej metoda odwzorowania biliniowego albo metoda trapezów,
matched -	metoda odpowiedniości zer i biegunów.

#### 3.1. Analiza dyskretnych wersji członu inercyjnego (model `dinerc.m`)

- zarejestrować charakterystyki skokowe dla okresu próbkowania  $T=0.5s$ ,
- zarejestrować odpowiedzi na wymuszenie sinusoidalne o pulsacji  $\omega=1\text{rad/s}$ ,
- zarejestrować odpowiedzi na wymuszenie sinusoidalne o pulsacji  $\omega=1\text{rad/s}$  i zaobserwować efekt nakładania się częstotliwości (*aliasing*),
- wykreślić logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe (Bodego) dla odpowiednika skokowego (dyskretyzacja ZOH) i aproksymacji trapezów (Tustina) badanego członu dla  $T=0.5s$ . W tym celu należy przejść do okna komend MATLABa (ciemne tło) i wywołać funkcję

```
>>dbode(licz,mian,T,w) gdzie:
```

**licz** - wektor współczynników licznika transmitancji  $G(z)$   
w kolejności malejących potęg  $z$ ,



- mian** - wektor współczynników mianownika transmitancji  $G(z)$  w kolejności jak wyżej,
- T** - okres próbkowania,
- w** - wektor określający przedział pulsacji  $\omega$  charakterystyki (przyjmować  $w=0.1:0.2:50$ , czyli od 0.1 do 50rad/s z krokiem 0.2).

Np. dla transmitancji:

$$G(z) = \frac{0.5z - 0.25}{z^2 - 0.7z}$$

$licz=[0.5 \ -0.25]$ ,  $mian=[1 \ -0.7 \ 0]$ , przy czym prawe strony (w nawiasach kwadratowych) mogą być podawane bezpośrednio jako parametry funkcji (w tym przypadku funkcji `dbode`).

- e) zarejestrować charakterystyki skokowe jak w a), ale dla okresu próbkowania  $T=1s$ . W tym celu zmienić parametr **Sample time** w opisie układów dyskretnych i przeliczyć parametry transmitancji dyskretnych zgodnie z metodą aproksymacji dla danego bloku. Dla metody trapezów:

$$G(s) = \frac{1}{s+a}, \quad s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad \Rightarrow \quad G_T(z) = \frac{\frac{T}{2}(z+1)}{z\left(1 + \frac{aT}{2}\right) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)}$$

### 3.2. Analiza dyskretnych wersji członu oscylacyjnego (model `dosc.m`)

- a) zarejestrować charakterystyki skokowe dla okresu próbkowania  $T=0.5s$ ,
- b) zarejestrować odpowiedzi na wymuszenie sinusoidalne o pulsacji  $\omega=1rad/s$ ,
- c) wykreślić logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe (Bodego) dla odpowiednika skokowego (ZOH), odpowiednika w sensie zer i biegunów (zero-pole match) oraz aproksymacji prostokątów (Eulera) badanego członu dla  $T=0.5s$  (jak w pkt.1d),
- d) zarejestrować charakterystyki skokowe jak w a), ale dla okresu próbkowania  $T=1s$ . W tym celu zmienić parametr **Sample time** w opisie układów dyskretnych i przeliczyć parametry transmitancji dyskretnych zgodnie z metodą aproksymacji dla danego bloku.

Odpowiedniość zer i biegunów:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \text{bieguny } s = -\sigma \pm j\omega_d, \quad \zeta\omega_n = \sigma, \quad \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \omega_d,$$

$$G'_{ZP}(z) = \frac{1}{2} \frac{(z+1)(1-2r\cos\theta+r^2)}{z^2 - 2zr\cos\theta + r^2}, \quad r = e^{-\sigma T}, \quad \theta = \omega_d T$$

Metoda Eulera:

$$G'_E(z) = \frac{T^2}{z^2 - (2-T)z + (1-T+T^2)}$$

- e) dla  $T=1$  zarejestrować odpowiedzi na wymuszenie sinusoidalne jak w b).

### 3.3. Analiza układu zamkniętego z dyskretną wersją członu całkującego z inercją (model `dast.m`)

- a) zarejestrować charakterystyki skokowe układu dla okresów próbkowania  $T=0.25, 0.5, 1s$ ,
- b) zarejestrować odpowiedzi na wymuszenie sinusoidalne o pulsacji  $\omega=1rad/s$  przy  $T=0.5s$ ,
- c) wykreślić logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe (Bodego) dyskretnego układu zamkniętego (odpowiednika skokowego) dla  $T=0.5s$  (jak w pkt.1d) i porównać je z charakterystykami układu ciągłego (wykorzystać funkcję `bode(licz,mian,w)`, gdzie  $licz$  i  $mian$  są wektorami współczynników transmitancji ciągłej  $G(s)$ ),

- d) wykreślić linie pierwiastkowe układu dyskretnego (odpowiednika skokowego ZOH) przy pomocy funkcji `>>drlocus(licz,mian,k)` gdzie  $k$  jest wektorem określającym przedział zmienności współczynnika wzmocnienia  $k$  (można przyjąć  $k=0:0.5:60$ , czyli od 0 do 60 co 0.5),
- e) zmienić układ dyskretny na odpowiednik w sensie zer i biegunów (matched) i powtórzyć punkty a)-d). Dyskretyzacja odbywa się wg wzoru:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+a)} \Rightarrow G'_{ZP}(z) = \frac{(z+1)(1-e^{-aT})}{2a(z-1)(z-e^{-aT})}$$

lub

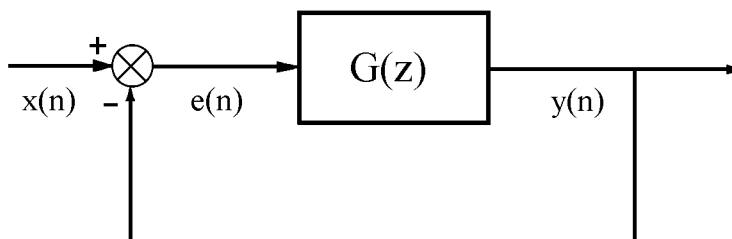
$$G''_{ZP}(z) = \frac{(z+1)^2(1-e^{-aT})}{4a(z-1)(z-e^{-aT})}$$

### 3.4. Badanie ciągłych układów dynamicznych przy pomocy równań różnicowych.

- a) dla podanych przez prowadzącego podstawowych ciągłych członów dynamicznych wyznaczyć równania różnicowe opisujące ich dynamikę i zaobserwować rozwiązania tych równań dla różnych wymuszeń i warunków początkowych.
- b) dla prostego układu regulacji ciągłej, podanego przez prowadzącego, wyznaczyć równania różnicowe opisujące jego dynamikę i porównać zachowanie się otrzymanego układu dyskretnego z odpowiednikami, wyznaczonymi analitycznie, przebiegami sygnałów dla układu ciągłego.

### 3.5. Badanie dynamiki liniowych układów dyskretnych.

- a) dla układu regulacji przedstawionego na rys. 4 (transmitancję  $G(z)$  zadaje prowadzący)



Rys.4.

należy:

- zaobserwować odpowiedź  $y(n)$ ,  $n \geq 0$  przy zerowych warunkach początkowych i wymuszeniu  $x(n) = \mathbb{1}(n)$  dla otwartej i zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego,
  - zaobserwować i zbadać analitycznie stabilność układu otwartego i zamkniętego (ewentualnie wyznaczyć parametryczny obszar stabilności),
  - otrzymać dyskretną charakterystykę amplitudowo-fazową przy otwartej i zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego,
- b) wykonać czynności jak w punkcie a) dla układu z członem dynamicznym o transmitancji  $H(z) \neq 1$  w pętli sprzężenia zwrotnego.

### 3.6. Badanie dynamiki liniowych układów impulsowych.

Dla układu przedstawionego na rys. 3 (  $G_O(s)$  i  $H(s)$  zadaje prowadzący) należy dobrać okres impulsowania  $T_k$  w zależności od stałych czasowych w układzie i:

- zaobserwować odpowiedź  $y(n)$ ,  $n \geq 0$  przy zerowych warunkach początkowych i wymuszeniu  $x(n) = 1(n)$  dla otwartej i zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego,
- zaobserwować uchyb  $e(n)$ ,  $n \geq 0$  dla wymuszenia skokowego  $x(n) = 1(n)$  przy zerowych warunkach początkowych,
- zaobserwować i zbadać analitycznie stabilność układu zamkniętego; wyznaczyć parametryczny obszar stabilności,
- otrzymać dyskretną charakterystykę amplitudowo-fazową układu zamkniętego,
- zbadać zależność uchybu regulacji  $e(n)$  od okresu impulsowania.

## 4. Opracowanie sprawozdania

- a) Opracować wykresy uzyskane w trakcie realizacji ćwiczenia:  
podać, jakich układów dynamicznych dotyczą, opisać osie układu współrzędnych i poszczególne przebiegi,
- b) Wykonać wymagane w programie ćwiczenia obliczenia analityczne,
- c) Dla każdego z wykonanych punktów sformułować wnioski wynikające z uzyskanych wyników.  
Zaprojektować cyfrowy odpowiednik  $H(z)$  filtra ciągłego o transmitancji  $G(s)$  zadanej przez prowadzącego i zadaną metodą. Przy projektowaniu uwzględnić opóźnienie  $T/2$  wnoszone przez operację *sample and hold*. Przeprowadzić badania porównawcze wersji ciągłej i dyskretny jak w pkt. 1 i 2. Obliczyć i zarejestrować charakterystyki częstotliwościowe  $H(z)$  i  $G(s)$ .

## LITERATURA

1. Ackermann J.: Regulacja impulsowa, WNT, 1976.
2. Amborski K., Marusak A.: Teoria sterowania w ćwiczeniach, PWN, 1978.
3. Beliczyński B., Kosiński W.: Wprowadzenie do regulacji cyfrowej, skrypt Politechniki Warszawskiej, 1987.
4. Kaczorek T.: Teoria układów regulacji automatycznej, WNT, 1974.
5. Papoulis A.: Obwody i układy, WKiŁ, 1988.