

**Wydział Elektryczny**  
**Zespół Automatyki (ZTMAiPC)**

## **KOMPUTERY W STEROWANIU**

### **Ćwiczenie 2** **DN**

#### **Przybliżone metody doboru nastaw regulatora**

#### **1. Cel ćwiczenia**

- Zapoznanie się z przybliżonymi metodami dobierania nastaw regulatora PID.
- Zdobycie umiejętności określania parametrów zastępczych stanowiących dane wejściowe dla kryterium.
- Porównanie różnych kryteriów doboru nastaw pod kątem wpływu na parametry odpowiedzi układu regulacji na skokowy sygnał zadany lub skokowe zakłócenie.

#### **2. Podstawy teoretyczne**

W ćwiczeniu rozpatrywane będą zagadnienia dotyczące *syntezy* (projektowania) układu regulacji automatycznej. Zagadnienie syntezy regulacji obejmuje dobranie struktury układu regulacji oraz *typu i nastaw* (parametrów) regulatora. Dane wejściowe zagadnienia syntezy obejmują:

- model matematyczny obiektu regulacji (otrzymywany w wyniku *identyfikacji*),
- zadanie układu regulacji i wskaźniki jakości sterowania,
- charakter zakłóceń mogących działać na układ (mieralne, losowe),
- ograniczenia dotyczące sygnałów wymuszających (np. mocy wzmacniacza).

W praktyce przyjmuje się szereg uproszczeń dotyczących zarówno modeli matematycznych obiektów jak i sformułowania wskaźników jakości regulacji i struktur regulatorów.

*Zadaniem syntezy jest wyznaczenie równania optymalnego regulatora jak najlepiej spełniającego przyjęte kryteria jakości regulacji. Istotnym punktem syntezy jest więc przyjęcie wskaźnika (kryterium) jakości regulacji.*

Kryteria jakości można podzielić na kilka grup:

- kryteria związane z oceną parametrów charakterystyki skokowej,
- kryteria związane z oceną parametrów charakterystyk częstotliwościowych,
- kryteria dotyczące rozkładu zer i biegunów transmitancji układu zamkniętego,
- kryteria całkowite.

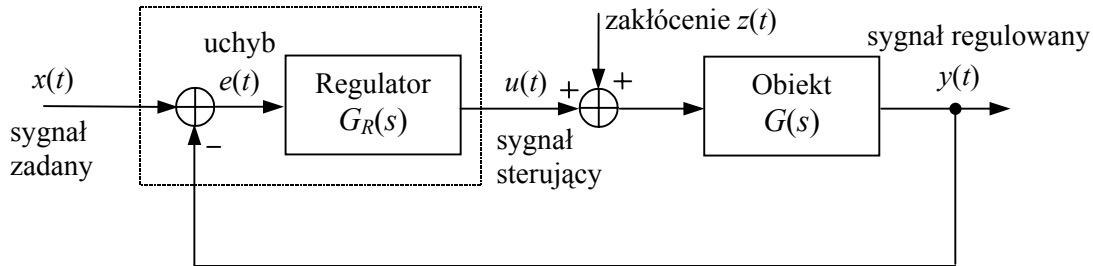
Wymienione grupy kryteriów są ze sobą ściśle powiązane (np. częstotliwościowa charakterystyka widmowa jest transformacją Fouriera czasowej charakterystyki impulsowej).

Wybór określonego kryterium wynika zazwyczaj z rodzaju zadania regulacji, pracochłonności obliczeń, możliwości pomiarowych itp. Jest on uwarunkowany rozpatrywanym problemem - duża liczba różnych kryteriów pozwala wybrać ocenę najodpowiedniejszą dla syntezy konkretnego układu regulacji.

Należy pamiętać, że *wymienione kryteria jakości dynamicznej* (w stanach przejściowych) są związane z *zapewnieniem żądanej dokładności statycznej regulacji* (tj. uchybów w stanie ustalonym).

## 2.1. Regulacja PID

Rys.4.1 przedstawia schemat typowego układu regulacji. Rolą regulatora jest zapewnienie pożądanego zachowania określonego sygnału wyjściowego z obiektu poprzez przetwarzanie (według zadanego algorytmu) sygnału sprzężenia zwrotnego i sygnału zadanego (najczęściej ich różnicy, czyli uchybu regulacji) i wytwarzanie sygnału sterującego obiektem. Z punktu widzenia opisu dynamiki regulator można traktować jako element opisany transmitancją  $G_R$  i kształtujący właściwości dynamiczne układu zamkniętego.



Rys. 4.1. Schemat blokowy układu regulacji

W większości zastosowań przemysłowych stosuje się regulatory komercyjne, które są regulatorami typu PID, tzn. realizują kombinację działania proporcjonalnego P, całkującego I i różniczkującego D. Działanie idealnego regulatora PID jest opisane równaniem różniczkowym:

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e dt + T_d \frac{de}{dt} \right], \quad (4.1)$$

co odpowiada transmitancji:

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \quad (4.2)$$

W praktyce algorytm działania odbiega od liniowego. Stosuje się np. ograniczenie zakresu zmian sygnału sterującego  $u(t)$ , wprowadza strefę martwą w części P, co zapobiega częstemu przełączaniu elementu wykonawczego przy przechodzeniu błędu przez zero, a do części D podaje się tylko sygnał sprzężenia zwrotnego  $-y(t)$ , co zapobiega uderzeniowym zmianom sygnału sterującego przy skokowych zmianach wartości zadanej. *Działanie całkujące regulatora zapewnia sprowadzenie do zera błędu regulacji w stanie ustalonym.*

Parametry  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  należy uważać za dające się nastawiać w danym regulatorze w pewnych zakresach wartości. Stałe te noszą powszechnie stosowane nazwy:

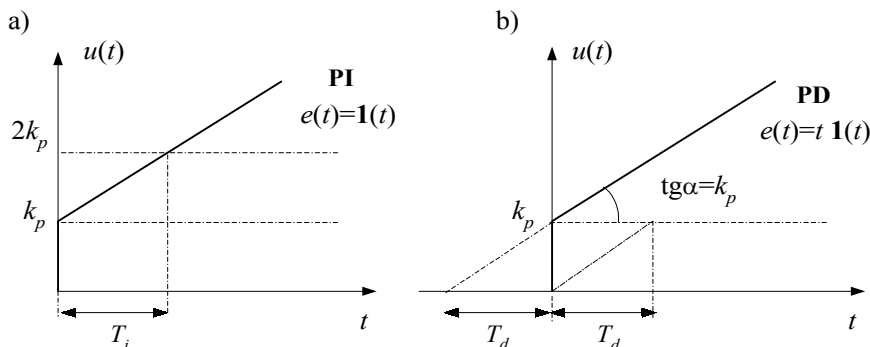
- $K_p$  – **współczynnik wzmocnienia** (częściej stosuje się jego odwrotność  $X_p = 1/K_p \cdot 100\%$  nazywaną **zakresem proporcjonalności**;  $X_p$  określa procentowy zakres zmiany sygnału wejściowego, przy której sygnał wyjściowy zmienia się w pełnym zakresie, tzn. o 100%),
- $T_i$  - **czas zdwojenia**,
- $T_d$  - **czas wyprzedzenia**.

**Czas zdwojenia**  $T_i$  jest to czas potrzebny na to, aby przy wymuszeniu skokowym podanym na wejście regulatora PI sygnał wyjściowy regulatora podwoił swą wartość w stosunku do skoku początkowego spowodowanego działaniem proporcjonalnym (Rys.4.2a). Liniowe narastanie sygnału wyjściowego jest efektem działania całkującego.

**Czas wyprzedzenia**  $T_d$  jest to czas po upływie którego, w przypadku podania na wejście regulatora PD sygnału narastającego liniowo, sygnał związany z działaniem proporcjonalnym zrówna się z sygnałem pochodzącym od działania różniczkującego (Rys.4.2b).

Zadanie projektowe polega na dobraniu wartości tych nastaw spełniających zadania regulacji. Omówione regulatory nie wyczerpują oczywiście wszystkich możliwych regulatorów. Do

realizowania bardziej złożonych zadań regulacji stosuje się np. regulatory PID wyższych rzędów, które mają więcej parametrów nastawianych (por. pkt.2.4).



Rys. 4.2. Graficzna interpretacja: a) czasu zdwojenia  $T_i$ , b) czasu wyprzedzenia  $T_d$

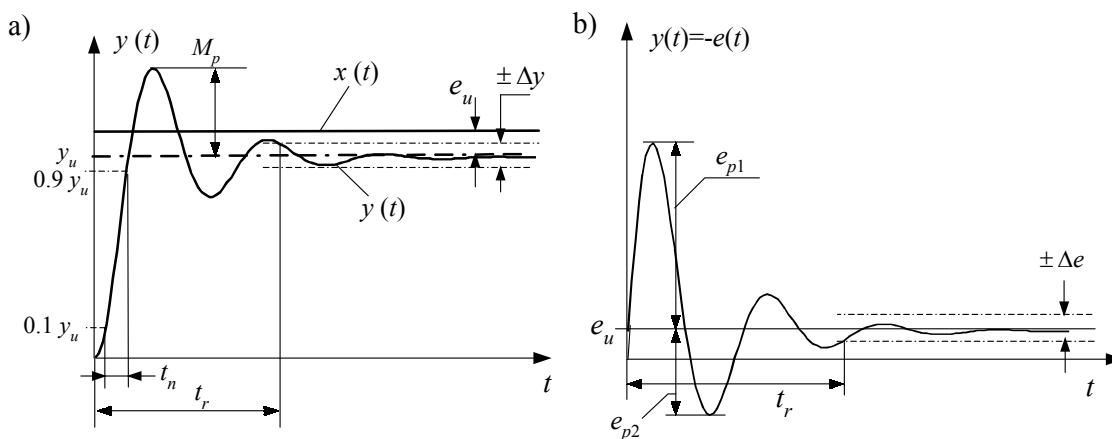
## 2.2. Kryteria jakości regulacji wynikające z wymagania określonego przebiegu sygnału błęd przy skokowej zmianie wartości zadanej lub zakłócenia

Podstawowym zadaniem układu automatycznej regulacji jest odwzorowanie przez sygnał regulowany  $y(t)$  sygnału zadanego  $x(t)$ . Zadanie to może być wykonane jedynie z pewną dokładnością, podczas pracy układu powstaje bowiem *uchyb regulacji*  $e(t)$  stanowiący różnicę między wielkością regulowaną a jej wartością zadaną (wywołany jest on szeregiem przyczyn, wśród nich zakłóceniami, realizacją techniczną układu, własnościami transmitancji układu otwartego itp.).

$$e(t) = x(t) - y(t) \tag{4.3}$$

Wymagania dynamiczne stawiane układom regulacji często sprowadzają się do żądania określonego przebiegu sygnału błęd przy skokowym wymuszeniu. W sygnale błęd można wyróżnić dwie składowe: **uchyby ustalony**  $e_u$  i **uchyby przejściowy**  $e_p(t)$ .

$$e(t) = e_u + e_p(t) \tag{4.4}$$



Rys. 4.3. Sposób wyznaczania wskaźników jakości regulacji na podstawie oscylacyjnego przebiegu wielkości regulowanej  $y(t)$ : a) po skoku wymuszenia  $x(t)$ , b) po skoku zakłócenia  $z(t)$  przy  $x=0$ .

Najczęściej stosowanymi wskaźnikami jakości związanymi z przebiegami czasowymi są (Rys.4.3):

- **uchyby ustalony**  $e_u$  tj. wartość sygnału błęd  $e(t)$  jaka utrzymuje się w układzie, gdy zanikną już procesy przejściowe ( $e_p(t)=0$ ):

$$e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \tag{4.5}$$

- **czas ustalania (regulacji)  $t_r$**  tj. czas jaki upływa od chwili doprowadzenia do układu wymuszenia (lub zakłócenia) do momentu, gdy składowa przejściowa sygnału błędu  $e_p(t)$  zmaleje trwale poniżej założonej wartości  $\Delta e$ . Zazwyczaj przyjmuje się  $\Delta e$  równe  $\pm 1$  lub  $\pm 3\%$  wokół wartości końcowej sygnału  $e_p(t)$ . *Czas regulacji określa czas trwania przebiegu przejściowego.*
- **czas narastania  $t_n$**  tj. czas potrzebny do tego, aby charakterystyka skokowa osiągnęła od 10% do 90% wartości ustalonej (inna definicja określa czas narastania jako czas dojścia od 0 do 100% wartości ustalonej). *Czas narastania określa szybkość działania układu regulacji.*
- **przeregulowanie  $M_p$**  - wyrażany w procentach stosunek maksymalnej wartości odpowiedzi skokowej do wartości stanu ustalonego (Rys.4.3a). *Przeregulowanie odpowiedzi skokowej jest miarą stabilności układu zamkniętego.* Jeżeli rozpatrywany jest przebieg uchybu regulacji (np. w odpowiedzi na skokowe zakłócenie) lub odpowiedź swobodna układu, to jako analogiczny wskaźnik przeregulowań stosuje się **współczynnik zanikania  $\kappa$**  tj. iloraz wartości bezwzględnych amplitud dwóch sąsiednich przeregulowań (Rys.4.3b):

$$\kappa = \left| \frac{e_{p2}}{e_{p1}} \right| \cdot 100\% \tag{4.6}$$

W przypadku przebiegów aperiodycznych przeregulowanie jest równe 0. Dla układu znajdującego się na granicy stabilności przeregulowanie  $\kappa=100\%$ .

Jeżeli układ zamknięty (nawet jeśli jest to układ wyższego rzędu) można aproksymować transmitancją członu oscylacyjnego II rzędu:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{4.7}$$

(gdzie:  $\omega_n$  - częstotliwość drgań własnych nietłumionych,  $\zeta$  - względny współczynnik tłumienia), to można używać następujących zależności przybliżonych:

$$t_u = \frac{\beta}{\zeta\omega_n}, \text{ gdzie } \beta = \begin{cases} 4.6 \text{ dla } \Delta e = 1\% \\ 3.5 \text{ dla } \Delta e = 3\% \end{cases}, \quad t_n \approx \frac{\alpha}{\omega_n}, \text{ gdzie } \alpha = \begin{cases} 1.4 \text{ dla } \zeta = 0.3 \\ 1.8 \text{ dla } \zeta = 0.5, \\ 2.1 \text{ dla } \zeta = 0.7 \end{cases}$$

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot 100\% \text{ (często spotykane wartości: } M_p \cong \begin{cases} 5\% \text{ dla } \zeta = 0.7 \\ 15\% \text{ dla } \zeta = 0.5 \\ 35\% \text{ dla } \zeta = 0.3 \end{cases}) \tag{4.8}$$

### 2.3. Całkowe kryteria jakości regulacji

Optymalizacja układu regulacji ma za zadanie uzyskanie możliwie krótkiego czasu regulacji i jak najmniejszego przeregulowania. Wymagania te są sprzeczne ze sobą i dlatego konieczny jest kompromis. W praktyce do oceny jakości układu regulacji stosuje się *kryteria całkowe*, mające charakter kryteriów globalnych, oceniających cały przebieg sygnału błędu  $e_p(t)$ . Polegają one na żądaniu *minimalizacji wartości jednego z całkowych wskaźników jakości*:

- **kryterium ISE (Integral Squared Error):**

$$I_{ISE} = \int_0^{\infty} e_p^2(t) dt \tag{4.9}$$

W przypadku zastosowania kryterium ISE do układu zamkniętego o transmitancji  $G(s)=1/(1+2\cdot\zeta\cdot s+s^2)$ , uzyskuje się  $\zeta=0.5$  i przeregulowanie  $M_p=16\%$ .

- **kryterium ITSE** (*Integral of Time multiplied by Squared Error*):

$$I_{ITSE} = \int_0^{\infty} t \cdot e_p^2(t) dt \quad (4.10)$$

Mnożenie przez czas  $t$  odpowiada nadawaniu wagi wartości kwadratu błędu i powoduje, że uzyskuje się większe tłumienie oscylacji wielkości regulowanej w dalszych przedziałach czasowych.

- **kryterium IAE** (*Integral of Absolute value of Error*)::

$$I_{IAE} = \int_0^{\infty} |e_p(t)| dt \quad (4.11)$$

W przypadku zastosowania tego kryterium do optymalizacji układu zamkniętego o transmitancji  $G(s)=1/(1+2\cdot\zeta\cdot s+s^2)$  otrzymuje się współczynnik tłumienia  $\zeta=1$ . W praktyce dopuszcza się na ogół pewien stopień przeregulowania, czyli tłumienie mniejsze od krytycznego, dzięki czemu szybciej osiąga się wartość zadaną. Dlatego kryterium IAE rzadko znajduje zastosowanie w praktyce.

- **kryterium ITAE** (*Integral of Time multiplied by Absolute value of Error*):

$$I_{ITAE} = \int_0^{\infty} t |e_p(t)| dt \quad (4.12)$$

Mnożenie przez czas  $t$  odpowiada nadawaniu wagi wartości bezwzględnej błędu. Kryterium to znalazło szerokie zastosowanie w technice, ponieważ prowadzi do kompromisu: niewielkie przeregulowanie przy stosunkowo krótkim czasie regulacji. Jeżeli układ zamknięty jest opisany transmitancją  $n$ -tego rzędu postaci:

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0}{M_n(s)},$$

to optymalne w sensie ITAE wielomiany mianownika są następujące (w zależności od rzędu  $n$ ):

$$P_1(s) = s + \omega_0$$

$$P_2(s) = s^2 + 1.41\omega_0 s + \omega_0^2$$

$$P_3(s) = s^3 + 1.75\omega_0 s^2 + 2.1\omega_0^2 s + \omega_0^3$$

$$P_4(s) = s^4 + 2.1\omega_0 s^3 + 3.4\omega_0^2 s^2 + 2.7\omega_0^3 s + \omega_0^4$$

gdzie  $\omega_0$  oznacza częstotliwość drgań własnych układu i jest miarą szybkości regulacji (pasma przenoszenia). Kryterium ITAE zastosowane do optymalizacji układu regulacji drugiego rzędu daje w wyniku współczynnik tłumienia  $\zeta = 1/\sqrt{2} = 0.707$  i przeregulowanie  $M_p=4\%$

## 2.4. Kryteria jakości regulacji odnoszące się do przebiegu charakterystyki częstotliwościowej układu zamkniętego

### 2.4.1. Kryterium modułu

Idealny układ regulacji powinien wiernie odwzorowywać sygnał wejściowy, czyli powinien spełniać warunek  $y(t) = x(t)$ . Wynika stąd następująca zależność na transmitancję układu zamkniętego:

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = 1 \quad (4.13)$$

W praktyce nie jest na ogół możliwe zrealizowanie regulatora o transmitancji spełniającej powyższy warunek. Dlatego korzysta się z **kryterium modułu** wyrażonego następującą zależnością:

$$|G_z(s)| \approx 1 \quad (4.14)$$

co oznacza, że amplitudowa charakterystyka częstotliwościowa powinna w możliwie szerokim paśmie częstotliwości mieć wartość stałą równą jedności. Warunek ten jest szczególnie istotny w otoczeniu  $\omega=0$ , ponieważ oznacza brak błędu w stanie ustalonym. W związku z tym po rozwinięciu funkcji  $G_z(\omega)$  w szereg Maclaurina w otoczenia punktu  $\omega=0$ , dostajemy następujące warunki:

$$\left(\frac{d|G_z(\omega)|}{d\omega}\right)_{\omega=0} = 0, \left(\frac{d^2|G_z(\omega)|}{d\omega^2}\right)_{\omega=0} = 0, \dots, \left(\frac{d^n|G_z(\omega)|}{d\omega^n}\right)_{\omega=0} = 0 \quad (4.15)$$

Ponieważ funkcja modułu jest funkcją parzystą:  $|G(j\omega)| = |G(-j\omega)|$ , to gdy  $\omega=0$  znikają wszystkie pochodne *nieparzyste* względem  $\omega$ . Jednocześnie pochodne parzyste zależą w tym przypadku od parametrów układu regulacji. Warunek zerowej wartości możliwie dużej liczby pochodnych parzystych

$$\left(\frac{d^{2n}|G_z(\omega)|}{d\omega^{2n}}\right)_{\omega=0} = 0 \quad (4.16)$$

oznacza więc kryterium modułu optymalnego, przy czym  $n$  oznacza liczbę nastawianych parametrów regulatora. W praktyce stosuje się często uproszczone kryterium modułu, polegające na skompensowaniu przy pomocy regulatora pewnej liczby dominujących stałych czasowych obiektu.

Załóżmy, że transmitancję statycznego obiektu regulacji w układzie zamkniętym jak na Rys.4.1 można przedstawić w postaci:

$$G(s) = K \frac{1}{1+sT_1} \cdot \frac{1}{1+sT_\sigma}, \quad (4.17)$$

gdzie stałe czasowe spełniają relację

$$T_\sigma < T_1 < 4T_\sigma. \quad (4.18)$$

$T_1$  jest jedyną dużą stałą czasową w obiekcie, natomiast stała czasowa  $T_\sigma$  może być traktowana jako suma zastępcza większej liczby pozostałych małych stałych czasowych obiektu:  $T_\sigma = \sum T_k$ . Dużą stałą czasową obiektu można skompensować przez zastosowanie regulatora PI o transmitancji:

$$G_R(s) = K_R \frac{1+sT_R}{sT_R} \quad (4.19)$$

gdzie  $K_R$  - współczynnik wzmocnienia  $k_p$ ,  $T_R = T_i$  - czas zdwojenia  $T_i$ .

Regulator PI oprócz działania forsującego potrzebnego do kompensacji inercji posiada człon całkujący pozwalający minimalizować uchyb regulacji w stanie ustalonym. Dla uzyskania kompensacji dużej stałej czasowej obiektu przyjmuje się

$$T_R = T_1 \quad (4.20)$$

Przy takim założeniu otrzymuje się transmitancję układu zamkniętego

$$G_z(s) = \frac{G_R G}{1 + G_R G} = \frac{K_R K}{K_R \cdot K + sT_1 + s^2 T_1 T_\sigma} \quad (4.21)$$

Osiągnięcie idealnej regulacji byłoby możliwe, gdyby przy wszystkich częstotliwościach, a więc przy wszystkich wartościach  $s$ , wielkość regulowana  $Y(s)$  była równa wymuszeniu  $X(s)$ . W rzeczywistości wymienione wielkości związane są zależnością:

$$Y(s) = G_z(s)X(s) \quad (4.22)$$

i dlatego w praktyce korzysta się z uproszczonego kryterium modułu. Przez odpowiedni dobór nastaw regulatora uzyskuje się w pobliżu  $\omega=0$  moduł transmitancji układu zamkniętego zbliżony do jedności.

Dobry regulator powinien zapewnić utrzymanie warunku  $|G_z(s)| \approx 1$  również przy zwiększaniu  $s=j\omega$  do możliwie dużej wartości. Mnożąc  $G_z(s)$  przez wyrażenie sprzężone  $G_z(s^*)$  otrzymuje się po przekształceniu zależność:

$$G_z^2(s) = \frac{K_R^2 K}{K_R^2 K + (2K_R K T_1 T_\sigma - T_1^2) s^2 + s^4 T_1^2 T_\sigma^2} \quad (4.23)$$

Jeżeli to wyrażenie ma być niezależne od częstotliwości, to co najmniej wyrażenie w nawiasie mianownika powinno być równe zero. Uwzględnienie tego warunku prowadzi do równania

$$K_R = \frac{T_1}{2KT_\sigma} \quad (4.24)$$

określającego drugi parametr regulatora. Dla obwodu regulacyjnego II rzędu z nastawą według kryterium modułowego uzyskuje się transmitancję standardową układu zamkniętego:

$$G_{zm}(s) = \frac{1}{1 + s2T_\sigma + s^2 2T_\sigma^2} \quad (4.25)$$

gdzie  $\zeta=1/\sqrt{2}$  i  $\omega_0=1/T_\sigma$ .

Zasady nastawiania regulatora według kryterium modułowego mogą być rozszerzone na obiekty inercyjne z większą liczbą stałych czasowych do kompensacji. W ogólnym przypadku zakłada się transmitancję obiektu postaci:

$$G(s) = K \frac{1}{1 + sT_\sigma} \prod_{v=1}^n \frac{1}{1 + sT_v} \quad (4.26)$$

gdzie:  $T_v$  - duża stała czasowa,  $T_\sigma$  - zastępcza mała czasowa. Do kompensowania dużych inercyjności obiektu dobiera się regulator PID  $n$ -tego rzędu o transmitancji:

$$G_R(s) = K_R \frac{1}{sT_c} \prod_{v=1}^n (1 + sT_{Rv}) \quad (4.27)$$

w której kolejne stałe czasowe regulatora służą do wyeliminowania stałych czasowym obiektu. Nastawy regulatora powinny mieć wartości:

$$T_{Rv} = T_v, \quad \frac{K_R}{T_c} = \frac{1}{2KT_\sigma} \quad (4.28)$$

Zauważmy, że do kompensacji dwóch stałych czasowych ( $n=2$ ) należy zastosować regulator

$$G_R(s) = K_R \frac{(1 + sT_{R1})(1 + sT_{R2})}{sT_c}, \quad (4.29)$$

którego transmitancja jest równoważna transmitancji idealnego regulatora PID postaci:

$$G_{PID}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \quad (4.30)$$

**Zadanie:** Wyznaczyć zależność między współczynnikami transmitancji (4.29) i (4.30).

#### 2.4.2. Kryterium symetrii

Określanie nastaw według tzw. **kryterium symetrii** stosuje się w przypadku obiektu, którego transmitancję można zapisać jako połączenie członu całkującego oraz zastępczej małej stałej czasowej  $T_\sigma = \sum T_k$ :

$$G(s) = K \frac{1}{sT_0} \frac{1}{1 + sT_\sigma} \quad (4.31)$$

Transmitancją o takiej postaci można też aproksymować obiekt statyczny postaci (4.17), o ile duża stała czasowa spełnia warunek:

$$T_1 > 4T_\sigma \quad (4.32)$$

Jeśli w tym przypadku zastosujemy regulator PI o transmitancji (4.19), to transmitancja układu zamkniętego przyjmie postać:

$$G_z(s) = \frac{K_R K (1 + sT_R)}{K_R K + sT_R K_R K + s^2 T_R T_c + s^3 T_R T_0 T_\sigma} \quad (4.33)$$

Zastosowanie kryterium symetrii daje następujące zalecenia co do nastaw regulatora:

$$T_R = 4T_\sigma, \quad K_R = \frac{T_0}{2KT_\sigma} \quad (4.34)$$

Po wpisaniu optymalnych nastaw do wzoru (4.34), otrzymujemy:

$$G_z(s) = \frac{1 + s4T_\sigma}{1 + s4T_\sigma + s^2 8T_\sigma^2 + s^3 8T_\sigma^3} \quad (4.35)$$

Wprowadzenie zmiennej  $q=2T_\sigma s$  daje standardową postać transmitancji zamkniętego układu regulacji III rzędu z regulatorem nastawionym według kryterium symetrii:

$$G_z(q) = \frac{1 + 2q}{1 + 2q + 2q^2 + q^3} \quad (4.36)$$

Nazwa kryterium jest związana z faktem, że powyższa funkcja spełnia warunki symetrii:

$$G_z(q)G_z(1/q) = 1, \quad G_z(q) + G_z(1/q) = 1 \quad (4.37)$$

W ogólności kryterium symetrii znajduje zastosowanie do obiektów astatycznych  $n$ -tego rzędu postaci:

$$G(s) = K \frac{1}{1 + sT_\sigma} \cdot \frac{1}{s^n \prod_{v=1}^n T_v} = K \frac{1}{1 + sT_\sigma} \cdot \frac{1}{s^n T_0'} \quad (4.38)$$

gdzie  $T_0' = \prod_{v=1}^n T_v$ . Do regulacji stosuje się regulator PID  $n$ -tego rzędu postaci:

$$G_R(s) = K_R \frac{(1 + sT_R)^n}{sT_c}, \quad (4.39)$$

którego optymalne nastawy są określone zależnościami:

$$T_R = 4nT_\sigma, \quad \frac{K_R}{T_c} = \frac{T_0'}{2KT_\sigma T_R^n} \quad (4.40)$$

Optymalizacja nastaw według kryterium modułowego daje znaczne tłumienie i małe przeregulowanie ( $M_p=4\%$ , czas narastania  $t_n=2.1T_\sigma$ , czas regulacji 1%  $t_r=6.5T_\sigma$ ) odpowiedzi układu zamkniętego na skokowe wymuszenie, co stanowi jej zaletę. Jednakże przy skokowym zakłóceniu proces regulacji jest długi. Z kolei optymalizacja nastaw według kryterium symetrii ma dobre właściwości jeśli chodzi o kompensację działania zakłócenia, ale zbyt duże przeregulowanie i czas ustalania odpowiedzi na skok sygnału zadanego ( $M_p=43\%$ , czas narastania  $t_n=1.4T_\sigma$ , czas regulacji 1%  $t_r=17.7T_\sigma$ ).



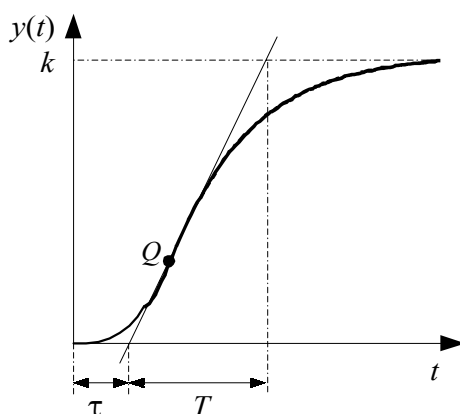
## 2.5. Metody Zieglera-Nicholsa doboru nastaw regulatora PID

Przedstawione w tym punkcie dwie tzw. metody Zieglera-Nicholsa polegają na określeniu nastaw regulatora PID w oparciu o pewne parametry, które można w prosty sposób wyznaczyć doświadczalnie w układzie z badanym obiektem. Pełna znajomość modelu obiektu nie jest potrzebna.

### 2.5.1. Metoda oparta na aproksymacji parametrów odpowiedzi skokowej

Metoda ta opiera się na fakcie, że odpowiedź skokowa wielu obiektów (zmierzona doświadczalnie albo otrzymana w wyniku symulacji) ma kształt pokazany na Rys.4.4. Odpowiedź taka jest charakterystyczna dla układów inercyjnych *wyższych rzędów*, ale można ją aproksymować charakterystyką skokową członu inercyjnego I rzędu z opóźnieniem transportowym:

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1} \cdot e^{-\tau s} \quad (4.41)$$



Rys. 4.4. Aproksymacja parametrów odpowiedzi skokowej obiektu inercyjnego. Linię styczną należy wystawić w punkcie przegięcia Q charakterystyki skokowej

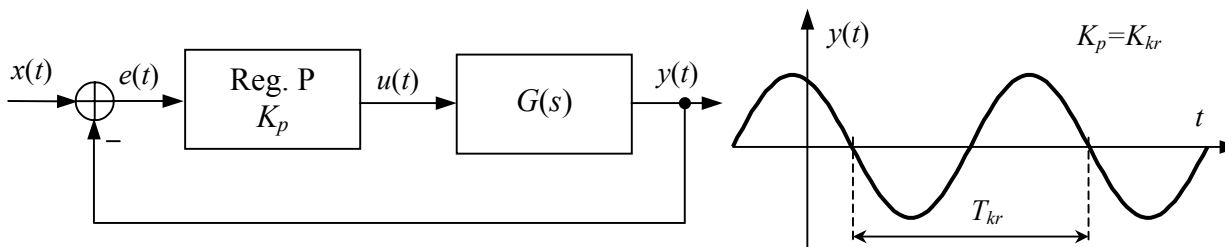
Na podstawie przebiegu odpowiedzi skokowej rzeczywistego obiektu należy wyznaczyć graficznie stałą czasową  $T$  i opóźnienie  $\tau$  transmitancji zastępczej jak pokazano na rysunku. Optymalne nastawy regulatora spełniające określone kryterium oblicza się w sposób teoretyczny dla układu regulacji z obiektem zastępczym. W Tabeli 1 podano wzięte z literatury wzory na optymalne nastawy dla trzech wymagań co do przebiegu regulacji po skokowej zmianie *zakłócenia*: - odpowiedzi aperiodycznej o minimalnym czasie regulacji, - odpowiedzi oscylacyjnej ( $\kappa=20\%$ ) o minimalnym czasie regulacji oraz - odpowiedzi minimalizującej całkę ISE. W układzie z obiektem rzeczywistym nastawy wzięte z tabeli mogą dawać – ze względu na błąd aproksymacji - przebiegi różniące się od założonych. Tym niemniej przedstawiona metoda jest skutecznym narzędziem wstępnego strojenia regulatora.

Tabela 1. Optymalne nastawy regulatora i wskaźniki jakości dla obiektu statycznego z opóźnieniem przy skokowej zmianie zakłócenia  $z=1(t)$ .

Kryterium jakości regulacji	Typ regulatora	Optymalne nastawy regulatorów			Wartości spodziewane	
		$K_p \cdot k$	$T_i$	$T_d$	$t_r$	$e_u/k$
$\kappa=0\%$ $t_r \rightarrow \min$	P	$0.3T/\tau$	-	-	$4.5\tau$	$\tau/(\tau+0.3T)$
	PI	$0.6T/\tau$	$0.8\tau+0.5T$	-	$8\tau$	0
	PID	$0.35T/\tau$	$2.4\tau$	$0.4\tau$	$5.5\tau$	0
$\kappa=20\%$ $t_r \rightarrow \min$	P	$0.7T/\tau$	-	-	$6.5\tau$	$\tau/(\tau+0.7T)$
	PI	$0.7T/\tau$	$\tau+0.3T$	-	$12\tau$	0
	PID	$1.2T/\tau$	$2\tau$	$0.4\tau$	$7\tau$	0
Minimum ISE	PI	$T/\tau$	$\tau+0.35T$	-	$16\tau$	0
	PID	$0.3T/\tau$	$1.3\tau$	$0.5\tau$	$10\tau$	0

### 2.5.2. Metoda oparta na wskaźnikach wzmocnienia krytycznego

Druga reguła wyznaczania nastaw regulatorów opiera się na znajomości parametrów układu znajdującego się na granicy stabilności. Parametry te są wyznaczane w następujący sposób: w *układzie zamkniętym z regulatorem typu P* zwiększa się współczynnik wzmocnienia  $K_p$  dopóki w *odpowiedzi skokowej*  $y(t)$  nie zaobserwuje się drgań niegasnących (Rys.4.5). W takim stanie należy zanotować wartość wzmocnienia krytycznego regulatora  $K_p=K_{kr}$  oraz zmierzyć okres drgań krytycznych  $T_{kr}$  sygnału wyjściowego.



Rys. 4.5. Wyznaczanie okresu drgań krytycznych układu na granicy stabilności

Nastawy regulatora wyznaczone według metody wskaźników drgań krytycznych są następujące:

<b>regulator P</b>	<b>regulator PI</b>	<b>regulator PID</b>
$K_p=0.45K_{kr}$	$K_p=0.45K_{kr}$	$K_p=0.6K_{kr}$
	$T_i=0.85T_{kr}$	$T_i=0.5T_{kr}$
		$T_d=0.12T_{kr}$

Powinny one zapewnić przeregulowanie odpowiedzi skokowej układu zamkniętego na poziomie nie przekraczającym 30%.

### 2.6. Optymalizacja nastaw ze względu na sygnał zadany lub zakłócenie

Trzeba pamiętać, że *nastawy zapewniające optymalną odpowiedź układu zamkniętego na skokową zmianę wartości zadanej* (np. w sensie minimalizacji jednego z kryteriów całkowych) *mają inne wartości niż nastawy zapewniające optymalną odpowiedź na skok zakłócenia*. Wynika to z faktu, że sygnał błędny regulacji  $e(t)$  jest wywoływany zarówno przez sygnał zadany  $x(t)$  jak i przez sygnał zakłócenia  $z(t)$ . Przy strukturze układu zamkniętego jak na Rys.4.1 transformata sygnału regulowanego jest opisana równością:

$$Y(s) = \frac{G(s)G_R(s)}{1 + G(s)G_R(s)} X(s) + \frac{G(s)}{1 + G(s)G_R(s)} Z(s) \quad (4.42)$$

w której transmitancje składników po prawej stronie różnią się (zauważmy jednak, że ze względu na jednakowe mianowniki w obu składnikach dynamika odpowiedzi swobodnych jest taka sama).

W związku z tym sposób doboru nastaw powinien być uzależniony od celu regulacji. W przypadku układu regulacji stałowartościowej  $x(t)=const$  i kluczowe znaczenie ma optymalizacja dynamiki układu regulacji pod kątem eliminacji wpływu zakłócenia i zachowania zerowego błędny od wymuszenia w stanie ustalonym. W układzie regulacji, w którym sygnał zadany ciągle się zmienia (np. układzie regulacji nadążnej) najważniejsza jest z kolei optymalizacja regulatora ze względu na wymuszenie. Zachowanie obu wymagań jest często sprzeczne i wymaga zachowania kompromisu.

## 3. Wykonanie ćwiczenia

Zadanie polega na doborze nastaw regulatora pracującego w układzie regulacji o strukturze jak na Rys.4.1. Model symulacyjny został stworzony w środowisku Matlab-Simulink. Regulator jest regulatorem typu PID, z którego przez wyłączenie działania różniczkującego i/lub całkującego można otrzymać regulatory typu PI, PD lub P. Obiektem regulacji jest układ inercyjny III rzędu o transmitancji:

$$G(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)} \quad (4.43)$$

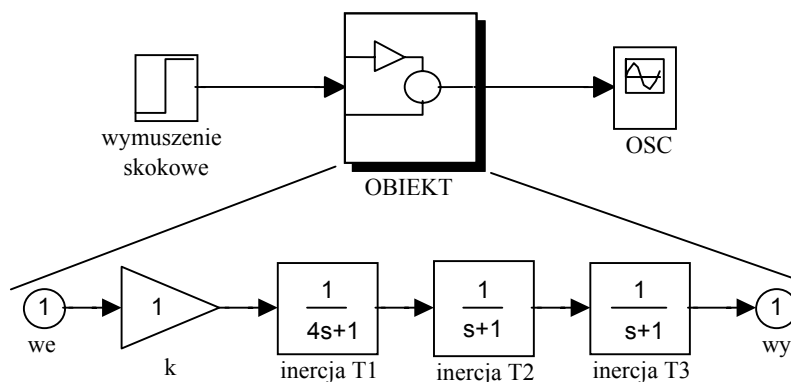
i parametrach zadanych przez prowadzącego (np.  $T_1=4$   $T_2=$   $T_3=1$ , i  $k=1$ ; zadane wartości mają być zanotowane w protokóle z ćwiczenia).

- Uruchomić Matlab, a następnie z linii komend wywołać nakładkę symulacyjną Simulink:  
`>> simulink <Enter>`

### 3.1. Określanie nastaw regulatora na podstawie charakterystyki skokowej obiektu

W tym punkcie należy określić parametry transmitancji modelu zastępczego obiektu typu inercja+opóźnienie w postaci transmitancji (4.43), na podstawie charakterystyki skokowej obiektu rzeczywistego (Rys.4.4).

- Otworzyć model dn\_skok służący do rejestracji charakterystyki skokowej obiektu. Poprzez dwukrotne kliknięcie na blok obiektu otworzyć okno pokazujące strukturę obiektu i wpisać zadane wartości  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  oraz  $k$ . Żeby wpisać np.  $T_1=4$  należy kliknąć na blok inercji T1 i zadać wektor współczynników wielomianu mianownika (*denominator*) w postaci:  $[4 \ 1]$ .
- Ustawić czas symulacji równy 20s (menu **Simulation | Parameters | Stop time = 20**).
- Uruchomić symulację (**Simulation | Start**) i zarejestrować odpowiedź skokową obiektu. Na podstawie jej przebiegu wyznaczyć graficznie parametry ( $\tau$ ,  $T$ ) transmitancji zastępczej obiektu według Rys.4.4.
- Zweryfikować poprawność aproksymacji zadając wyznaczone parametry w modelu zastępczym (inercja+opóźnienie). Podłączyć sygnał wyjściowy z modelu zastępczego do bloku OSC i powtórzyć symulację. Zmodyfikować parametry modelu zastępczego w taki sposób, żeby przebieg charakterystyk był zbliżony.
- Dla wyznaczonych wartości ( $\tau$ ,  $T$ ) obliczyć nastawy dla regulatora typu P i PI według trzech kryteriów określonych w tabeli 1.



Rys. 4.6. Model symulacyjny dn\_skok i model obiektu

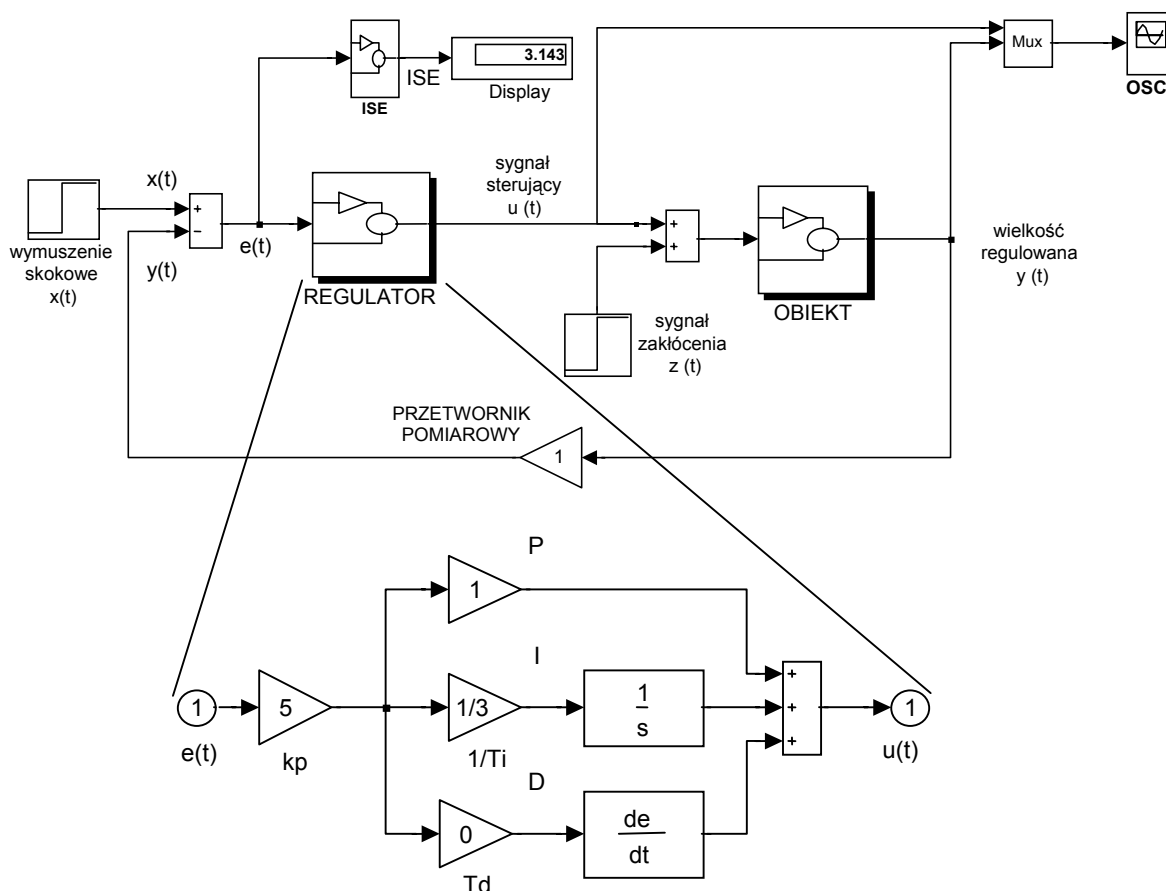
### 3.2. Badanie układu regulacji z regulatorem nastawionym metodą charakterystyki skokowej

W tym punkcie należy przeprowadzić symulacje działania układu regulacji z obiektem, którego charakterystyka skokowa była analizowana w pkt.3.1, i z idealnym regulatorem PID o transmitancji :

$$G_r(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

Regulację typu PI lub P można uzyskać przez wyzerowanie odpowiednich parametrów regulatora ( $T_d=0$ , ew. również  $1/T_i=0$ ).

- Będziemy rozważać regulację w przypadku *skokowego zakłócenia*, tzn.  $x(t)=0$ ,  $z(t)=\mathbf{1}(t)$ , co odpowiada stabilizacji sygnału wyjściowego przy zakłóceniach działających na wejście obiektu (np. stabilizacja prędkości obrotowej silnika przy zmianie momentu obciążenia). W tym celu wyzerować sygnał zadany (w bloku sygnału zadanego na diagramie głównym dn wpisać *Final value=0*) i zadać skokowe zakłócenie (w bloku zakłócenia wpisać *Final value=1*).
- Badania należy przeprowadzić dla nastaw obliczonych według trzech kryteriów z Tabeli 1:
  - 1) odpowiedź układu zamkniętego bez przeregulowania i o minimalnym czasie ustalania ( $\kappa=0$ ,  $\min t_r$ ),
  - 2) odpowiedź układu zamkniętego z przeregulowaniem  $\kappa=20\%$  i o minimalnym czasie ustalania,
  - 3) minimum całki ISE.
- Otworzyć główny model symulacyjny dn, w którym zamodelowano układ regulacji. Sygnał ISE (jego wartość jest pokazywana na wyświetlaczu) reprezentuje aktualną wartość całki z kwadratu błędu regulacji. *Końcową wartość ISE należy notować po każdej symulacji*. Poprzez dwukrotne kliknięcie na blok regulatora można otworzyć okno pokazujące jego strukturę i zadać nastawy ( $k_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$ ) jako parametry odpowiednich bloków. Nastawę części całkującej wygodnie jest zadawać w formie *odwrotności*, np. jeśli  $T_i=3.6$ , to w bloku wzmacniacza należy wpisać  $1/T_i=1/3.6$ . *Czas symulacji 6-8 razy większy od największej stałej czasowej obiektu* (np. **Simulation | Parameters | Stop time = 30**).
- Wykonać symulacje i zarejestrować wyniki dla regulatora typu P (odłączyć gałęzie I oraz D zadając  $T_d=0$  i  $1/T_i=0$ ) z nastawą  $k_p$  obliczoną według każdego z trzech kryteriów.
- Przeprowadzić symulacje i zarejestrować wyniki dla regulatora typu PI ( $T_d=0$  w gałęzi D) z nastawami ( $k_p, T_i$ ) obliczonymi według każdego z trzech kryteriów.
- Dla kryterium (2) dopuszczającego przeregulowanie przeprowadzić symulację i zarejestrować wyniki dla regulatora typu PID z nastawami ( $k_p, T_i, T_d$ ). Porównać je z wynikami uzyskanymi dla regulacji PI.



Rys. 4.7. Główny model symulacyjny układu regulacji dn i model idealnego regulatora PID

- Porównać jakość regulacji (przeregulowanie, czasy narastania i ustalania odpowiedzi skokowej, końcową wartość ISE) w każdym z przypadków i sprawdzić, czy przebieg sygnału sterowanego spełnia warunki kryterium, według którego dobrano nastawy regulatora.

### 3.3. Określanie nastaw regulatora metodą wzbudzenia drgań krytycznych

- W badanym układzie pozostawić **regulator typu P** (odłączyć gałęzie I oraz D zadając  $T_d=0$  i  $1/T_i=0$ ) i zmieniając nastawę  $k_p$  doprowadzić do wystąpienia w odpowiedzi skokowej  $y(t)$  układu zamkniętego *drgań niegasnących o stałej amplitudzie* (należy przeprowadzić kilka symulacji dla różnych  $k_p$ , ale zarejestrować tylko tę z drganiami krytycznymi). Zanotować wartość wzmocnienia krytycznego regulatora  $k_p = k_{kr}$  i zmierzyć (na wykresie) okres drgań krytycznych  $T_{kr}$  według Rys.4.5.

Sposób alternatywny: otworzyć model dn\_kr, w bloku obiektu wpisać odpowiednie wartości parametrów i uruchomić symulację (sygnałem zadany jest przebieg prostokątny). W trakcie symulacji zmieniać *on-line* wartość  $k_p$  za pomocą potencjometru bloku *Slider* do uzyskania drgań niegasnących. Zarejestrować przebieg i zanotować wartości  $(k_{kr}, T_{kr})$ .

- Dla otrzymanych wartości  $(k_{kr}, T_{kr})$  wyznaczyć nastawy dla regulatora typu P oraz PI.
- Dla każdego typu regulatora przeprowadzić symulację działania układu i zarejestrować przebiegi.
- Porównać wyniki z uzyskanymi w pkt.3.2 i ocenić jakość regulacji. Które z kryteriów rozpatrywanych w pkt.3.2 dają podobne wyniki?
- Jak powinno się postępować w celu wzbudzenia drgań krytycznych w rzeczywistym układzie regulacji?

### 3.4. Dobór nastaw metodą kryterium modułu/symetrii

- W zależności od relacji między dużą stałą czasową  $T_1$ , a sumą zastępczą małych stałych czasowych  $T_\sigma = T_2 + T_3$  (por. (4.18) i (4.32)) założyć model obiektu w postaci jednej z transmitancji:

- kryterium modułu (4.17):  $G(s) = k \frac{1}{1+sT_1} \cdot \frac{1}{1+sT_\sigma}$ ,

- kryterium symetrii (4.31):  $G(s) = k \frac{1}{sT_1} \frac{1}{1+sT_\sigma}$ .

Do regulacji zastosujemy regulator PI o transmitancji:  $G_R(s) = K_p \frac{1+sT_i}{sT_i}$

- Wyznaczyć nastawy optymalne w sensie wybranego kryterium:
  - kryterium modułu (4.20) i (4.24):  $T_i = T_1$ ,  $K_p = \frac{T_1}{2KT_\sigma}$ ,
  - kryterium symetrii (4.34):  $T_i = 4T_\sigma$ ,  $K_p = \frac{T_1}{2KT_\sigma}$ .
- Przeprowadzić symulację i zarejestrować wyniki odpowiedzi na skokowe zakłócenie.
- Wyzerować sygnał w bloku zakłócenia na diagramie głównym dn i zadać skokowy sygnał zadany (jak w pkt.3.2). Przeprowadzić symulację i zarejestrować wyniki odpowiedzi na skokowe wymuszenie.
- Zmienić wartości stałych czasowych *obektu* (według zaleceń prowadzącego) tak, aby spełniał warunek stosowalności drugiego z rozpatrywanych w tym punkcie kryteriów. Wyznaczyć nowe nastawy regulatora PI i powtórzyć symulacje działania układu regulacji dla przypadków: skokowego zakłócenia oraz skokowego sygnału zadanego.
- Porównać jakość regulacji w odpowiedzi na skokowe wymuszenie i zakłócenie uzyskaną dla obu kryteriów i sprawdzić, czy przebieg sygnału sterowanego spełnia wskaźniki dla odpowiedzi skokowych podane na końcu pkt.2.4.2.

- Dla którego z przypadków (tzn. skoku wymuszenia czy skoku zakłócenia) optymalizowane są nastawy regulatora? Czy w przypadku badanego obiektu jedno z kryteriów daje wyniki jednoznacznie lepsze niż drugie? Jakie są relacje pomiędzy nastawami zalecanymi przez jedno i drugie kryterium?

#### 4. Opracowanie sprawozdania

1. Opracować uzyskane w ćwiczeniu wykresy (opisać warunki i wartości parametrów i nastaw, dla których zostały zarejestrowane, graficznie określić wskaźniki jakości, tj. czas narastania i regulacji, przeregulowania, wartość uchybu w stanie ustalonym oraz wartość końcową ISE).
  2. Ocenić zgodności otrzymanych wyników z założeniami kryterium, według którego dobierane były nastawy (dla pierwszej metody Zieglera-Nicholsa przewidywane wartości  $t_r$  i  $e_u$  są podane w tabeli 1) i wskazać przyczyny ewentualnych rozbieżności.
  3. Odpowiedzieć na pytania sformułowane w pkt. 3 z odpowiednim komentarzem.
- Do sprawozdania należy dołączyć protokół z ćwiczenia.

#### Literatura

1. T. Kaczorek: „Teoria układów regulacji automatycznej”, WNT, Warszawa 1974.
2. H. Tunia, M. Kaźmierkowski: „Podstawy automatyka napędu elektrycznego”, PWN, Warszawa 1983.
3. Red. W. Chotkowskiego: „Podstawy automatyki”, Skrypt Politechniki Gdańskiej, 1993.
4. Red. W. Findeisena: „Poradnik inżyniera. Automatyka”, WNT, Warszawa 1973.

Częstochowa, 1999