

Wydział Elektryczny
Zespół Automatyki (ZTMAiPC)

LABORATORIUM KOMPUTEROWYCH UKŁADÓW STEROWANIA

Ćwiczenie 3

Identyfikacja układów dynamicznych

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodami blokowej i rekurencyjnej identyfikacji układów dynamicznych z liniowymi modelami dyskretnymi.

2. Wprowadzenie

Identyfikacja jest podejściem do budowania modelu układu dynamicznego polegającym na analizie zależności między jego sygnałami wejściowymi i wyjściowymi bez wnikania w prawa fizyczne rządzące tymi zależnościami. Z tego powodu nazywana jest metodą "czarnej skrzynki" (*black box*). Identyfikację stosuje się wówczas, gdy prawa rządzące modelowanym zjawiskiem są albo nieznanne albo zbyt skomplikowane, aby wykorzystać je do konstrukcji modelu dla celów sterowania. W takiej sytuacji do określenia modelu dynamiki rzeczywistego układu i estymacji nieznannej parametrów takiego modelu wykorzystuje się dane eksperymentalne. Parametry modelu identyfikacji nie mają zazwyczaj interpretacji fizycznej.

Procedura identyfikacji jest procedurą iteracyjną i obejmuje następujące etapy:

- planowanie pomiarów w celu uzyskania danych (dobra metoda identyfikacji nie powinna być wrażliwa na charakter sygnałów wejściowych; klasyczne metody wymagają np. sygnału skokowego lub sinusoidalnego). Często uzyskanie danych wystarczających do identyfikacji jest możliwe tylko na drodze odpowiedniego pobudzania wejść układu, a takie oddziaływanie nie zawsze jest możliwe w praktyce.
- wybór struktury modelu, tzn. określenie postaci i rzędu równań, opóźnień itp.
- estymację parametrów modelu. Metoda estymacji zależy od przyjętego modelu i tego, czy obliczenia są prowadzone w trybie on- czy off-line.
- sprawdzenie poprawności modelu. Do sprawdzenia najlepiej wykorzystać dane pomiarowe inne niż wykorzystane do estymacji parametrów. W razie negatywnego wyniku testu procedurę powtarza się.

2.1 Matematyczne modele identyfikacji

Ze względu na korzystanie z danych pomiarowych, które mają charakter sygnałów dyskretnych w czasie (są to najczęściej rejestracje komputerowe), matematyczne modele identyfikacji są modelami dyskretnymi i liniowymi względem poszukiwanych parametrów. Uwzględniają one również, że dane pomiarowe są obciążone błędami poprzez wprowadzenie do modeli przypadkowych zakłóceń.

W dziedzinie dyskretnego czasu wprowadza się dla skrócenia zapisu operator przesunięcia sygnału w tył o k próbek: $q^{-k}x(n)=x(n-k)$, w zapisie dający równania analogiczne do równań z zespolonym argumentem z^{-k} w dziedzinie transformat Z . Równanie różnicowe dynamiki układu

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_{na} y(n-na) = b_0 u(n-nk) + b_1 u(n-1-nk) + \dots + b_{nb} u(n-nb-nk) + e(n) + c_1 e(n-1) + \dots + c_{nc} e(n-nc) \quad (0)$$

gdzie $y(n)$ jest sygnałem wyjściowym, $u(n)$ - sygnałem wejściowym, $\{e(n)\}$ - szumem losowym modelującym niemiernalne zakłócenia, a nk - liczbą taktów opóźnienia transportowego przenoszenia sygnału wejściowego, można wtedy zapisać w zwartej formie wielomianowej:

$$A(q)y(n) = B(q)u(n-nk) + C(q)e(n), \quad (1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}, \\ B(q) &= b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}, \\ C(q) &= 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc} \end{aligned}$$

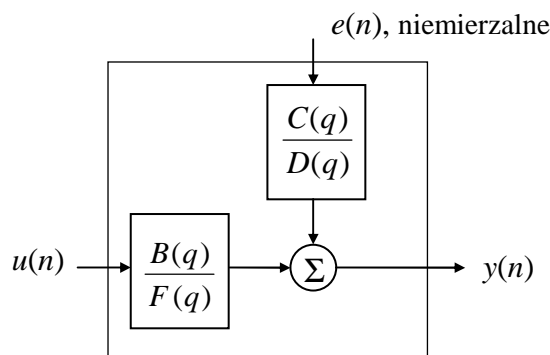
Przedstawiony model nosi nazwę modelu ARMAX (AutoRegressive, Moving Average with eXogenous input). Można go przedstawić w formie "transmitancyjnej":

$$y(n) = \frac{B(q)}{A(q)} u(n-nk) + \frac{C(q)}{A(q)} e(n) \quad (2)$$

Wyjście $y(n)$ zależy w nim od:

- pewnej liczby poprzednich wartości na wyjściu y , co określa się mianem autoregresji,
- pewnej liczby kolejnych wartości zewnętrznego sygnału wejściowego u ,
- pewnej liczby kolejnych wartości zakłócenia w postaci ciągu szumu białego $\{e\}$, tzw. średniej ruchomej.

Dla $C(q)=1$ otrzymuje się bardziej szczegółowy model ARX, zakładający brak korelacji zakłóceń.



Rys.1. Schemat modelu Boxa-Jenkinsa

Do celów identyfikacji transmitancji stosuje się bardziej ogólny model Boxa-Jenkinsa postaci:

$$y(n) = \frac{B(q)}{F(q)} u(n-nk) + \frac{C(q)}{D(q)} e(n), \quad (3)$$

w którym mianowniki transmitancji $H_u(z) = z^{-nk} \frac{B(z)}{F(z)}$ dla sygnału wejściowego i transmitancji

$H_e(z) = \frac{C(z)}{D(z)}$ dla szumu (modelu szumu) są różne (model ARMAX jest przypadkiem szczególnym

z $B=F=A$). Wielomiany: $F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{nf} q^{-nf}$, $D(q) = 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{nd} q^{-nd}$.

2.2 Metoda najmniejszych kwadratów (*Least Squares - LS*)

Sformułowanie i rozwiązanie problemu

W przypadku ogólnym zadanie polega na dopasowaniu do danych pomiarowych $y(n)$, $n=1,2,\dots,N$, (indeks n oznacza najczęściej dyskretny czas) modelu postaci:

$$\hat{y}(n) = \theta_1\phi_1(n) + \theta_2\phi_2(n) + \dots + \theta_k\phi_k(n) + e(n) \quad (4)$$

gdzie $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ są znanymi funkcjami, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ są nieznanymi parametrami, a $e(n)$ niemiernym zakłóceniem. Zadanie polega na takim dobraniu k parametrów, aby wartości zmierzone $y(n)$ zgadzały się jak najlepiej z wartościami $\hat{y}(n)$ obliczonymi z modelu. Model (4) jest tzw. *modelem regresji liniowej*, a funkcje $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ są nazywane regresorami.

Sformułowanie zadania identyfikacji wymaga określenia kryterium będącego miarą jak dobrze model pasuje do danych pomiarowych. Zakładając, że wszystkie pomiary mają tę samą precyzję, parametry powinny być wybrane w taki sposób, aby minimalizować funkcję strat

$$V(\bar{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \varepsilon^2(n) \quad (5)$$

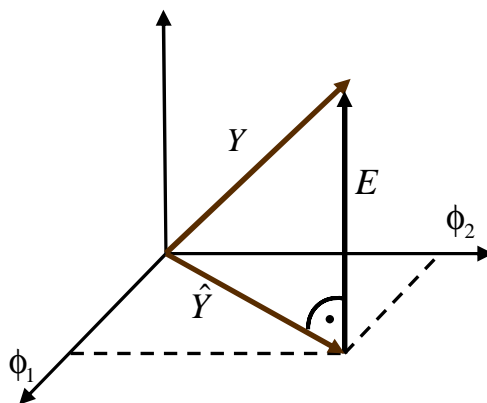
gdzie: $\varepsilon(n) = y(n) - \hat{y}(n)$ jest błędem dopasowania, $\bar{\theta}$ - estymata parametrów, N - liczba danych pomiarowych. Dla uproszczenia wygodnie jest wprowadzić notację wektorową:

$$\phi(n) = \begin{bmatrix} \phi_1(n) \\ \phi_2(n) \\ \vdots \\ \phi_k(n) \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_k \end{bmatrix}, Y(N) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, E(N) = \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \vdots \\ \varepsilon(N) \end{bmatrix}, \Phi(N) = \begin{bmatrix} \phi^T(1) \\ \phi^T(2) \\ \vdots \\ \phi^T(N) \end{bmatrix} \quad (\text{macierz } N \times n)$$

Funkcja strat może być teraz zapisana w postaci:

$$V(\bar{\theta}, N) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \varepsilon^2(n) = \frac{1}{2} E^T E = \frac{1}{2} \|E\|^2 \quad (6)$$

$$E = Y - \hat{Y} = Y - \Phi\bar{\theta} \quad (7)$$



Rys.2. Interpretacja graficzna estymaty LS w przypadku $k=2$

Minimum funkcji strat (6) uzyskuje się obliczając jej pochodną względem $\bar{\theta}$ i przyrównując ją do zera. Otrzymuje się w ten sposób równanie *liniowe względem parametrów*, które można rozwiązać analitycznie. Rozwiązaniem jest:

$$\bar{\theta}_{opt} = \hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (8)$$

Jest to optymalna estymata dla problemu LS. Jeśli wprowadzimy oznaczenie

$$P = (\Phi^T \Phi)^{-1}, \quad (9)$$

to równanie (8) można przepisać w postaci:

$$\hat{\theta} = P \sum_{n=1}^N \varphi(n) y(n) \quad (10)$$

Warunkiem istnienia jednoznacznego rozwiązania jest odwracalność macierzy $\Phi^T \Phi$ nazywana *warunkiem pobudzenia* (regresory muszą zawierać informację wystarczającą do estymacji).

Modelu ARX można sformułować bezpośrednio jako modelu regresji liniowej tworząc następujące wektory regresorów (znane dane pomiarowe) i poszukiwanych parametrów:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= [-y(n-1), -y(n-2), \dots, -y(n-na), u(n-nk), u(n-1-nk), \dots, u(n-nb-nk)]^T \\ \theta &= [a_1, a_2, \dots, a_{na}, b_0, b_1, \dots, b_{nb}]^T \end{aligned} \quad (11)$$

Takie podejście nazywa się *metodą błędu predykcji* (dla $d \geq 1$), ponieważ opiera się na minimalizacji wartości oczekiwanej sumy kwadratów błędów predykcji $\varepsilon(n) = y(n) - \hat{y}(n|n-1)$, gdzie estymata

$\hat{y}(n|n-1) = \Phi^T(n) \hat{\theta}(n-1)$ jest 1-krokovym predyktorem wyjścia w chwili n na podstawie danych do chwili $n-1$.

2.3 Statystyczna interpretacja metody najmniejszych kwadratów.

Założmy, że dane pomiarowe y są generowane przez układ

$$y(n) = \Phi^T(n) \theta_0 + e(n), \quad (12)$$

gdzie θ_0 jest wektorem "prawdziwych" parametrów, a $\{e(n), n=1,2,\dots\}$ jest ciągiem *niezależnych* zmiennych losowych o zerowej średniej i wariancji σ^2 (biały szum). Wtedy estymator LS (8) ma następujące właściwości:

- $E[\hat{\theta}] = \theta_0$ (wartość oczekiwana jest równa prawdziwej, estymata jest nieobciążona),
- $\text{var } \hat{\theta} = \sigma^2 P$,
- $\hat{\sigma}^2 = 2J(\hat{\theta}, N) / (N - k)$ jest nieobciążoną (*unbiased*) estymatą wariancji σ^2 szumu,

gdzie k jest liczbą parametrów w θ_0 , a N - liczbą danych. W typowych warunkach, kiedy funkcje $\varphi(n)$ są tego samego rzędu, $\text{var } \hat{\theta}$ maleje jak $1/N$, tzn. wiarygodność estymacji jest coraz lepsza.

Implikacją powyższych właściwości jest to, że metoda LS daje poprawne wyniki jedynie wtedy, kiedy prawdziwym modelem, z którego uzyskuje się pomiary jest model nie wprowadzający korelacji szumu białego (np. ARX lub ARMAX z $C(q)=q^m$).

2.4 Rozszerzona metoda najmniejszych kwadratów (*Extended Least Squares - ELS*)

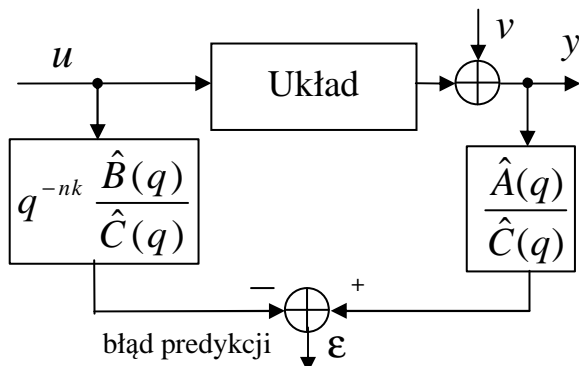
Metoda ELS jest rozszerzeniem metody LS na układy, w których zakłócenia są ze sobą skorelowane. Tego rodzaju układy modelowane są m.in. jako układy ARMAX (1). Idea polega na estymacji parametrów $C(q)$ korelacji szumu. Ponieważ zakłócenia $\{e(n)\}$ nie są mierzalne model regresji jest budowany przez aroksymowanie ich obliczonymi błędami predykcji

$$\varepsilon(n) = y(n) - \Phi^T(n) \hat{\theta}(n-1), \quad (13)$$

gdzie: $\theta^T = [a_1, \dots, a_{na}, b_1, \dots, b_{nb}, c_1, \dots, c_{nc}]$,

$$\phi^T(n) = [-y(n-1), \dots, -y(n-na), u(n), \dots, u(n-nb), \varepsilon(n), \dots, \varepsilon(n-nc)] \quad (14)$$

są rozszerzonymi wektorami parametrów i regresorów. Opisywana metoda nazywana jest również rekursywną metodą największej wiarygodności (*Maximum Likelihood - ML*). Minimum funkcji strat musi być w tym przypadku znajdowane iteracyjnie (*problem jest nieliniowy względem parametrów*).



Rys.3. Identyfikacja metodą błędu predykcji z modelem ARMAX

Korelacja zakłócenia v na rys. 3 jest określona równaniem:

$$v(n) = e(n) + c_1 e(n-1) + \dots + c_{nc} e(n-nc) = C(q)e(n)$$

gdzie $\{e(n)\}$ jest ciągiem szumu białego.

2.5 Rekurencyjne obliczanie estymaty LS

W wielu przypadkach, np. w regulatorach adaptacyjnych, pomiary $y(k)$ są wykonywane sekwencyjnie w trybie on-line. Estymaty są wtedy obliczane dla różnych N i obliczenia - ze względu na czasochłonność obliczeń - powinny być zorganizowane w taki sposób, aby obliczenia wykonane dla N pomiarów mogły być wykorzystane do wyznaczenia estymaty dla $N+1$ pomiarów. Po uzyskaniu dodatkowego pomiaru

$$\Phi(N+1) = \begin{bmatrix} \Phi(N) \\ \phi^T(N+1) \end{bmatrix}, Y(N+1) = \begin{bmatrix} Y(N) \\ y(N+1) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Wykorzystując wzory (8)-(10) oraz zależność $P^{-1}(N+1) = P^{-1}(N) + \phi(N+1)\phi^T(N+1)$, przy założeniu istnienia $P(N)$, można wyprowadzić następujące zależności na rekurencyjną estymatę najmniejszych kwadratów (*Recursive Least Squares - RLS*):

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(N+1) &= \hat{\theta}(N) + K(N) [y(N+1) - \phi^T(N+1)\hat{\theta}(N)], \\ K(N) &= P(N+1)\phi(N+1) = P(N)\phi(N+1) [I + \phi^T(N+1)P(N)\phi(N+1)]^{-1}, \\ P(N+1) &= [I - K(N)\phi^T(N+1)]P(N). \end{aligned} \quad (16)$$

Dla układów z jednym wyjściem odwracanie macierzy o wymiarze równym liczbie dodawanych pomiarów w drugim ze wzorów (16) sprowadza się do dzielenia przez skalar $(1 + \phi^T P \phi)$.

Z pierwszego wzoru w (16) widać, że nowa estymata jest obliczana przez dodanie poprawki do estymaty poprzedniej. Poprawka jest proporcjonalna do błędu predykcji

$$\varepsilon(N+1) = y(N+1) - \phi^T(N+1)\hat{\theta}(N), \quad (17)$$

ponieważ $\phi^T(N+1)\hat{\theta}(N) = \hat{y}(N+1)$ można interpretować jako wartość pomiaru w chwili $N+1$ przewidzianą przez model na podstawie poprzedniej estymaty parametrów. Składowe wektora $K(N)$ są czynnikami wagowymi poprawki.

Zauważmy, że macierz $P(N)$ jest określona tylko wtedy, kiedy nieosobliwa (odwaracalna) jest macierz

$$\Phi^T(N)\Phi(N) = \sum_{n=1}^N \phi(n)\phi^T(n). \quad (18)$$

Jednakże macierz (18) jest zawsze osobliwa, jeśli N jest wystarczająco małe. Oznacza to, że dysponujemy zbyt małą liczbą pomiarów do estymacji n parametrów. Żeby uzyskać warunki początkowe do obliczeń wybiera się takie N_0 , że macierz $P(N_0)$ i pierwsza estymata są określone

$$P(N_0) = [\Phi^T(N_0)\Phi(N_0)]^{-1}$$

$$\hat{\theta}(N_0) = P(N_0)\Phi^T(N_0)y(N_0) \quad (19)$$

i prowadzi obliczenia rekursywne dla $N \geq N_0$. Rozwiązaniem umożliwiającym obliczenia rekursywne od początku jest wystartowanie z warunkiem początkowym $P(0)=P_0$, $\hat{\theta}(0) = \theta_0$, gdzie P_0 jest macierzą dodatnio określoną i dobraną w taki sposób, aby

$$P(N) = [P_0^{-1} + \Phi^T(N)\Phi(N)]^{-1} \quad (20)$$

było bliskie $[\Phi^T(N)\Phi(N)]^{-1}$, np. $P_0 = \alpha I$ (I - macierz jednostkowa), gdzie α jest dużą liczbą.

2.6 Układy o parametrach zmiennych w czasie

W funkcji strat (5) wszystkie dane mają tę samą wagę. Jeśli parametry układu zmieniają się w czasie zachodzi potrzeba eliminowania wpływu starych danych. Można to zrobić stosując funkcję strat z eksponencjalnie malejącymi wagami:

$$V(\bar{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \lambda^{N-n} [y(n) - \phi^T(n)\bar{\theta}]^2. \quad (21)$$

$\lambda < 1$ jest tzw. "współczynnikiem zapominania", miarą tego jak szybko stare dane tracą znaczenie. Rekursywna estymata LS dla funkcji strat (21) ma postać:

$$\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + K(n) [y(n+1) - \phi^T(n+1)\hat{\theta}(n)],$$

$$K(n) = \frac{P(n)\phi(n+1)}{\lambda + \phi^T(n+1)P(n)\phi(n+1)}, \quad (22)$$

$$P(n+1) = [I - K(n)\phi^T(n+1)] \frac{P(n)}{\lambda}.$$

2.7 Identyfikacja dyskretnej transmitancji

W kontekście identyfikacji transmitancji modele identyfikacji przedstawia się w formie

$$y(n) = H_u(q)u(n) + H_e(q)e(n) \quad (23)$$

gdzie estymowana transmitancja $H_u(q)$ jest częścią deterministyczną modelu, a $H_e(q)$ - modelem szumu. Funkcję transmitancji faktoryzuje się w postaci wielomianów licznika i mianownika. Popularne są dwa modele identyfikacji transmitancji:

- bardziej ogólny model Boksa-Jenkinsa BJ:

$$y(n) = \frac{B(q)}{F(q)} u(n - nk) + \frac{C(q)}{D(q)} e(n) \quad (24)$$

gdzie $H_u(q) = q^{-nk} B(q) / F(q)$. Transmitancja $H_e(q) = C(q) / D(q)$ filtruje ciąg szumu białego $\{e(n)\}$ (jest modelem szumu).

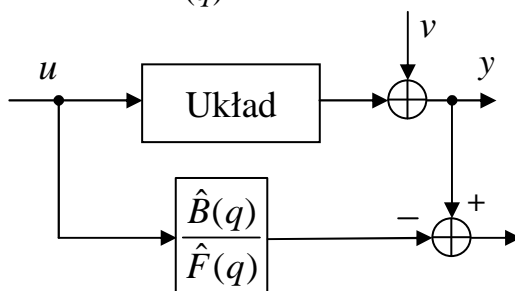
- model błędu wyjścia OE (output error model):

$$y(n) = \frac{B(q)}{F(q)} u(n - nk) + v(n) \quad (25)$$

W modelu OE nie czyni się założeń co do skorelowania ciągu zakłóceń $\{v(n)\}$. Model szumu nie jest estymowany. Kryterium optymalizacji dla modelu OE ma postać:

$$\min_{\hat{B}, \hat{F}} E \left[\sum_{n=1}^N \varepsilon^2(n) \right], \quad \varepsilon(n) = y(n) - \frac{\hat{B}(q)}{\hat{F}(q)} u(n - nk) \quad (26)$$

z estymatą próbek wyjściowych $\hat{y}(n) = \frac{\hat{B}(q)}{\hat{F}(q)} u(n - nk)$.



Rys.4. Identyfikacja metodą błędu wyjścia OE (output error)

Identyfikacja z modelem błędu wyjściowego jest nieliniowym problemem estymacji rozwiązywanym metodami iteracyjnymi.

Jakość estymacji parametrów metodą OE można poprawić stosując wstępną filtrację danych redukującą obciążenie (*bias* – błąd systematyczny) estymat spowodowane korelacjami w ciągu zakłóceń $\{v(n)\}$. Jest to tzw. wybielanie danych (*prewhitening*). Estymacja OE z wybielaniem obejmuje następujące kroki:

- 1) wyznacza się początkowe estymaty \tilde{B}, \tilde{F} standardową metodą LS dla modelu początkowego o strukturze ARX (F odgrywa rolę wielomianu autoregresji A): $F(q)y(n) = B(q)u(n - nk) + v(n)$
- 2) filtruje się dane identyfikacji $y(n), u(n)$ za pomocą filtra o transmitancji $1 / \tilde{F}(q)$ otrzymując dane o zredukowanej korelacji (wybielone): $y^F(n) = \frac{1}{\tilde{F}(q)} y(n), \quad u^F(n) = \frac{1}{\tilde{F}(q)} u(n)$
- 3) przeprowadza się powtórny estymację metodą LS dla modelu ARX ze zmodyfikowanymi danymi: $F(q)y^F(n) = B(q)u^F(n - nk) + v(n)$

otrzymując końcowe estymaty B, F metody OE z wybielaniem.

Przykład: Ilustracja różnicy pomiędzy modelem błędu predykcji ARX

$$y(n) + ay(n-1) = bu(n-1) + e(n), \quad A(q) = 1 + aq^{-1}, nk = 1, \quad B(q) = b$$

a modelem błędu wyjścia OE postaci:

$$y(n) = \frac{bq^{-1}}{1 + aq^{-1}}u(n) + v(n), \quad F(q) = 1 + aq^{-1}, nk = 1, \quad B(q) = b$$

Estymata metody błędu predykcji: $\hat{y}(n) = -\hat{a}y(n-1) + \hat{b}u(n-1)$

Estymata metody błędu wyjścia: $\hat{y}(n) = -\hat{a}\hat{y}(n-1) + \hat{b}u(n-1)$

W metodzie błędu predykcji estymata opiera się na danej pomiarowej $y(n-1)$ z wcześniejszej chwili, w metodzie błędu wyjścia estymata opiera się na estymacie $\hat{y}(n-1)$ obliczonej poprzednio, co sprawia, że zagadnienie estymacji jest nieliniowe względem parametrów.

3. Program ćwiczenia

3.1. Identyfikacja blokowa (off-line)

W tym punkcie identyfikacja przeprowadzana jest za pomocą komend skryptowych Matlab. Pary odpowiadających sobie danych (próbek) wejściowych i wyjściowych do identyfikacji

$$z = [y \ u]$$

otrzymuje się w wyniku symulacji „prawdziwego” modelu `modtrue` (rys. 4) pobudzanego sygnałem deterministycznym u oraz losowym e :

$$y = \text{idsim}([u \ e], \text{modtrue})$$

Dane do identyfikacji w dyskretnych chwilach czasowych zapisanych w wektorze t generowane są za pomocą funkcji:

$$[t, z] = \text{idmoddata}(\text{modelnr}, \text{inputnr}, \text{estdev}, \text{emean})$$

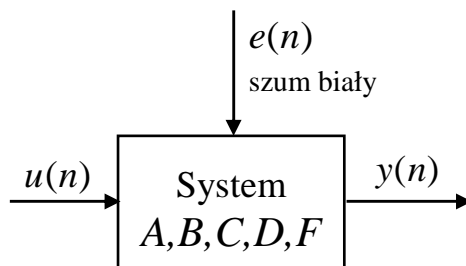
gdzie:

`modelnr` – numer modelu, wartość 1,2 lub 3 (domyślnie `modelnr=1`),

`inputnr` – rodzaj wejściowego sygnału deterministycznego, `inputnr=1` – sygnał binarny ± 1 o losowych chwilach zmian poziomu (*random binary signal RBS*), `inputnr=2` - sygnał sinusoidalny o stałej częstotliwości i jednostkowej amplitudzie (domyślnie `inputnr=1`),

`estdev` – odchylenie standardowe sygnału losowego (domyślnie `estdev=0.5`),

`emean` – wartość średnia sygnału losowego (domyślnie `emean=0`)



Rys. 5. Ogólny schemat modelu identyfikacji

Model identyfikacji w formacie wewnętrznym *theta* biblioteki *System Identification* Matlab reprezentuje ogólne równanie:

$$A(q)y(n) = \frac{B(q)}{F(q)}u(n-nk) + \frac{C(q)}{D(q)}e(n) \quad (27)$$

gdzie:

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na}$$

$$B(q) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb+nk-1}q^{-(nb+nk-1)}, \text{ jeśli } nk > 0, \text{ to } b_0 = \dots = b_{nk-1} = 0$$

$$C(q) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{nc}q^{-nc}$$

$$D(q) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{nd}q^{-nd}$$

$$F(q) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{nf}q^{-nf}$$

Wiodące jedynki w wielomianach nie są parametrami estymowanymi. Na podstawie (27) ogólny model transmitancji od wejścia $u(n)$ do wyjścia $y(n)$ (część deterministyczna modelu identyfikacji) ma postać:

$$H_u(q) = q^{-nk} \frac{B(q)}{A(q)F(q)}, \tag{28}$$

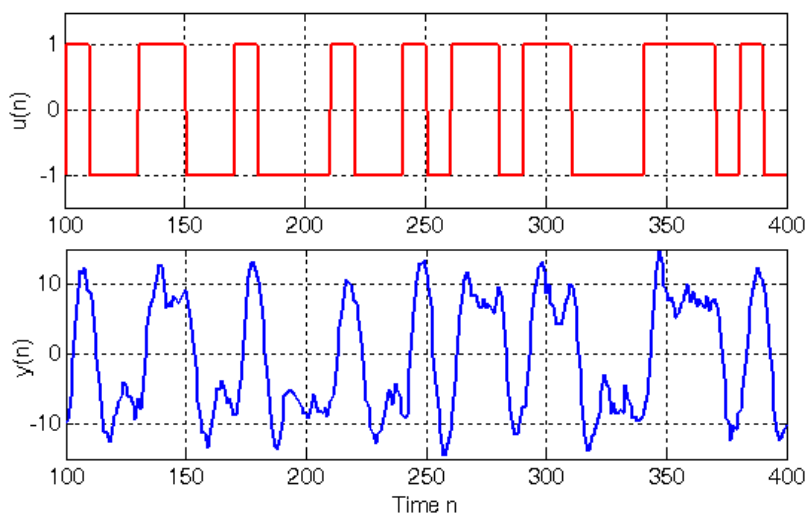
natomiast ogólny model szumu: $H_e(q) = \frac{C(q)}{A(q)D(q)} \tag{29}$

Dla ułatwienia: prawdziwymi „nieznanymi” modelami (*black box*), z których pochodzą dane identyfikacji używane w ćwiczeniu, są modele o strukturze ARMAX z $na=2$, $nb=2$, $nc=0$ lub 2 oraz $nk=1$ lub 2.

Zadanie polega na identyfikacji parametrów nieznanego modelu na podstawie wygenerowanych dla niego zaszumionych danych pomiarowych.

- a) Wygenerować dane do identyfikacji dla numeru modelu określonego przez prowadzącego za pomocą funkcji `idmoddata`, np.

```
>> [t, z, modtrue]=idmoddata(1); % modelnr=1, pozostałe parametry wej. domyślne
i zarejestrować (Edit | Copy Figure) wykresy danych identyfikacji (jak na rys. 6).
```



Rys.6. Dane identyfikacji: przebiegi deterministycznego sygnału wejściowego $u(n)$ i zaszumionego sygnału wyjściowego $y(n)$

- b) Dokonać identyfikacji parametrów modelu (`tharmax`) przy założeniu struktury ARMAX przyjmując $na=2$, $nb=2$, $nc=2$, $nk=1$ i z włączonym śledzeniem iteracji (`trace`):

```
>> tharmax=armax(z,[2 2 2 1], 'trace'); % A(q)y(n) = B(q)u(n-nk) + C(q)e(n)
```

i z okna komend wynotować wartości funkcji strat $V(\theta)$ i normy wektora gradientu $\|g\|$ dla ostatniej iteracji, np.

```
ITERATION # 3
Current loss: 0.26769 Previous loss: 0.26778
Current th prev. th gn-dir
-1.4955 -1.4950 -0.0005
```

```

0.6991    0.6988    0.0003
0.9256    0.9239    0.0016
0.5840    0.5875   -0.0035
-1.0199   -1.0184   -0.0015
0.2408    0.2444   -0.0037

```

```

Norm of gn-vector: 0.0055811
Expected improvement: 0.0092888 %
Achieved improvement: 0.034252 %

```

- c) Wynotować z okna komend estymowane parametry wielomianów A, B, C modelu ARMAX oraz ich odchylenia standardowe podawane przez funkcję:

```
>> idpargr(t, z, tharmax);
```

Uwaga: wyświetlane są parametry wszystkich pięciu wielomianów A, B, C, D, F ogólnej postaci modelu identyfikacji *theta* System Identification Matlaba z wiodącymi jedynkami (A, C, D, F) lub z nk wiodącymi zerami w przypadku wielomianu B , np. dla $na=2, nb=2, nc=2, nk=1$:

```

Estymowane parametry wielomianów modelu
Ae =
    1.0000   -1.4955    0.6991

Be =
         0    0.9256    0.5840

Ce =
    1.0000   -1.0199    0.2408

De =
     1

Fe =
     1

Odchylenia standardowe estymat parametrów modelu
stdev =
    0.0082    0.0059    0.0449    0.0634    0.0569    0.0564

```

Należy zanotować parametry tylko tych wielomianów, które dotyczą danego modelu (tj. tylko A, B, C z powyższego listingu dla modelu ARMAX). Kolejne odchylenia standardowe z ostatniego wiersza (określające szacowaną dokładność estymat) odnoszą się do kolejnych estymowanych parametrów, tzn.:

$$a_1 = -1.4955 \pm 0.0082, \quad a_2 = 0.6991 \pm 0.0059$$

$$b_1 = 0.9256 \pm 0.0449, \quad b_2 = 0.5840 \pm 0.0634$$

$$c_1 = -1.0199 \pm 0.0569, \quad c_2 = 0.2408 \pm 0.0564$$

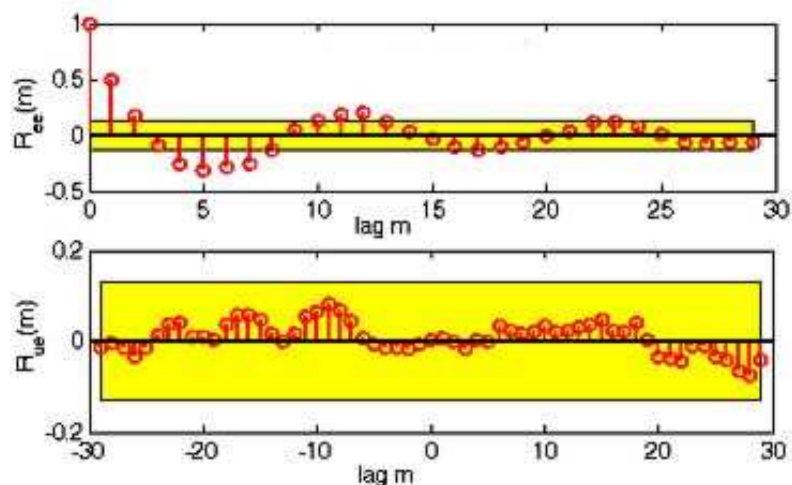
Zarejestrować wykres sygnału wyjściowego rzeczywistego i estymowanego na podstawie wyznaczonego modelu oraz wykresy autokorelacji błędów dopasowania wartości sygnału wyjściowego $R_{ee}(m)$ i korelacji wzajemnej błędów dopasowania z próbkami sygnału wejściowego $R_{ue}(m)$ (rys. 6).

Interpretacja wykresów korelacji: przyjęty model identyfikacji można uznać za poprawny, jeżeli wykresy korelacji mieszczą się w zaznaczonych na żółto przedziałach ufności i mają charakter losowy, tzn. nie wykazują regularności, np. w formie pofalowań jak $R_{ee}(m)$ na rys. 7. Jeżeli tak nie jest, to znaczy, że przyjęta struktura modelu i/lub metoda estymacji nie pozwala na wykorzystanie całej informacji zawartej w danych.

- d) Dokonać identyfikacji parametrów modelu (*thoe*) przy założeniu struktury błędu wyjścia OE (*output error*, prosty model identyfikacji transmitancji $H(q) = q^{-nk}B(q)/F(q)$ bez estymowania korelacji w szumie) z $nb=2, nf=2, nk=1$ i włączonym śledzeniem iteracji:

```
>> thoe=oe(z, [2 2 1], 'trace'); % y(n) = [B(q)/F(q)]u(n-nk) + v(t)
```

i z okna komend wynotować wartości funkcji strat $V(\theta)$ i normy wektora gradientu $\|g\|$ dla ostatniej iteracji jak w podpunkcie b).



Rys. 7. Wykresy autokorelacji błędów dopasowania wartości sygnału wyjściowego $R_{ee}(m)$ i korelacji wzajemnej błędów dopasowania z próbkami sygnału wejściowego $R_{ue}(m)$ z 99% przedziałami ufności przy założeniu, że błędy dopasowania są szumem białym.

- e) Wynotować z okna komend estymowane parametry wielomianów B, F modelu OE oraz ich odchylenia standardowe podawane przez funkcję:

```
>> idpargr(t, z, thoe);
```

Dla modelu OE estymowane są wielomiany B, F :

Estymowane parametry wielomianów modelu

```
Ae =  
    1
```

```
Be =  
    0    0.9004    0.6289
```

```
Ce =  
    1
```

```
De =  
    1
```

```
Fe =  
    1.0000   -1.4911    0.6965
```

Odchylenia standardowe estymat parametrów modelu

```
stdev =  
    0.0358    0.0505    0.0056    0.0040
```

W tym przypadku:

$$b_1 = 0.9004 \pm 0.0358, \quad b_2 = 0.6289 \pm 0.0505$$

$$f_1 = -1.4911 \pm 0.0056, \quad f_2 = 0.6965 \pm 0.0040$$

Zarejestrować wykres sygnału wyjściowego rzeczywistego i estymowanego na podstawie wyznaczonego modelu oraz wykresy autokorelacji $R_{ee}(m)$ i korelacji wzajemnej $R_{ue}(m)$.

- f) Dokonać identyfikacji parametrów modelu (*thoepw*) przy założeniu rozszerzonej metody OE z „wybieleniem” danych (*prewhitening* – wstępna filtracja eliminuje wpływ korelacji próbek szumu), $nb=2, nf=2, nk=1$:

```
>> thoepw=oepr(z,[2 2 1]);
```

W tym przypadku stosuje się regresję liniową (procedurę bez iteracji) dla modelu o strukturze ARX, którego wielomian A reprezentuje wielomian F modelu OE z wybielaniem.

- g) Wynotować z okna komend estymowane parametry wielomianów $F=A$ i B modelu (gdzie $A=F$ modelu OE) oraz ich odchylenia standardowe podawane przez funkcję:

```
>> idpargr(t,z,thoepw);
```

Zarejestrować jak poprzednio wykresy korelacji $R_{ee}(m)$ i $R_{ue}(m)$.

☞ Porównać wyniki z wynikami otrzymanymi dla modelu OE bez wybielania.

- h) Dokonać identyfikacji parametrów modelu (*thbj*) przy założeniu struktury Boksa-Jenkinsa BJ (rozszerzony model identyfikacji transmitancji $H(q)=B(q)/F(q)$ z estymowaniem korelacji w szumie za pomocą transmitancji $B(q)/F(q)$ szumu białego) z $nb=2$, $nc=2$, $nd=2$, $nf=2$, $nk=1$ i włączonym śledzeniem iteracji:

```
>> thbj=bj(z,[2 2 2 2 1], 'trace'); % y(n) = [B(q)/F(q)]u(n-nk) + [C(q)/D(q)]e(t)
```

i z okna komend wynotować wartości funkcji strat $V(\theta)$ i normy wektora gradientu $\|g\|$ dla ostatniej iteracji jak w podpunkcie b).

- i) Wynotować z okna komend estymowane parametry wielomianów B,C,D,F modelu BJ oraz ich odchylenia standardowe podawane przez funkcję:

```
>> idpargr(t,z,thbj);
```

Zarejestrować jak poprzednio wykres sygnału wyjściowego rzeczywistego i estymowanego na podstawie wyznaczonego modelu oraz wykresy autokorelacji $R_{ee}(m)$ i korelacji wzajemnej $R_{ue}(m)$.

- j) Odczytać parametry wielomianów „prawdziwego” układu *modtrue*, z którego pochodzą dane pomiarowe przekształcając model w formacie *theta* do postaci wielomianowej:

```
» [A,B,C,D,F]=th2poly(modtrue)
```

☞ Przy opracowaniu sprawozdania sporządzić tabelkę z wartościami estymat tych parametrów modeli ARMAX, OE i BJ, które odpowiadają parametrom układu rzeczywistego, wraz z ich odchyleniami standardowymi, oraz zanotowanymi wartościami funkcji strat $V(\theta)$ dla rozpatrywanych struktur modeli identyfikacji. Porównać jakość identyfikacji rozpatrywanych struktur pod kątem zgodności z parametrami układu rzeczywistego.

3.2. Identyfikacja blokowa – schemat symulacyjny

W tym punkcie identyfikacja przeprowadzana jest z wykorzystaniem schematu blokowego Simulinka. Estymacja parametrów modelu dokonywana jest na podstawie bloku par próbek sygnałów wejściowego i wyjściowego. Domyślna długość bloku danych, określona przez parametr *Calculate after how many points* (Po ilu punktach obliczać) estymatorów, to 64 okresy próbkowania.

- a) Otworzyć i zarejestrować (**Edit | Copy model**) model symulacyjny

```
>> identsim
```


Przeprowadzić identyfikację modelu BLACK BOX o strukturze Boksa-Jenkinsa i parametrach zadanych przez prowadzącego:

1) $B=[0 \ 1 \ 0.5]$, $F=[1 \ -1.5 \ 0.7]$, $C=[1 \ -1 \ 0.2]$, $D=[1 \ -1.5 \ 0.7]$
(ponieważ $F=D$ jest to w istocie model ARMAX, w którym $A=F$)

2) $B=[0 \ 0 \ 1 \ 0.5]$, $F=[1 \ -1.5 \ 0.7]$, $C=[1 \ -1 \ 0.2]$, $D=[1 \ -1.5 \ 0.7]$
(jak w pkt.1 jest to w istocie model ARMAX, w którym $A=F$)

3) $B=[0 \ 0.8 \ 0.5]$, $F=[1 \ -1 \ 0.3]$, $C=[1]$, $D=[1]$

(ponieważ $C=D=1$, jest to w istocie model błędu wyjścia OE z szumem nieskorelowanym)

Identyfikację przeprowadzić dla struktury w formie bardziej ogólnego modelu Boksa-Jenkinsa w bloku *System Model Estimator* (blok *Box-Jenkins model estimator* z listy *System ID Blocks* biblioteki *Simulink Library* otwieranej przyciskiem  z belki menu Matlaba, zadać *Sample time=1*) z parametrami nb , nc , nd , nf , nk opisującymi poprawnie strukturę podanych powyżej modeli BLACK BOX, czyli:

- dla modelu 1: $nb=2, nc=2, nd=2, nf=2, nk=1$,
- dla modelu 2: $nb=2, nc=2, nd=2, nf=2, nk=2$,
- dla modelu 3: $nb=2, nc=0, nd=0, nf=2, nk=1$.

Symulacje przeprowadzić dla następujących przypadków:

- a.1. wejście $u(n)$ prostokątne, brak szumu $e(n)$ ($Mean=0, Variance=0$),
- a.2. wejście $u(n)$ prostokątne ($Waveform=square$), szum gaussowski $e(n)$ o średniej 0 i wariancji 0.4 ($Mean=0, Variance=0.4$),
- a.3. wejście $u(n)$ prostokątne, szum gaussowski $e(n)$ o średniej 0.2 i wariancji 0.4 ($Mean=0.2, Variance=0.4$),
- a.4. wejście $u(n)$ sinusoidalne ($Waveform=sine$), brak szumu ($Mean=0, Variance=0$),
- a.5. wejście $u(n)$ sinusoidalne, szum gaussowski $e(n)$ o średniej 0 i wariancji 0.4 ($Mean=0, Variance=0.4$).

Po każdej symulacji zanotować z okna komend (zaznaczyć i skopiować) estymowane parametry wielomianów transmitancji (Transfer function) $H_u(z)=B(z)/F(z)$ sygnału deterministycznego $u(n)$ oraz modelu szumu (Noise model), tj. transmitancji $H_e(z)=C(z)/D(z)$ sygnału gaussowskiego szumu białego $u(n)$, np.:

```
Transfer function:
num/den =


      1.0171 z + 0.4947
-----
z^2 - 1.4996 z + 0.70105
```

```
Noise model:
num/den =

z^2 - 1.1527 z + 0.23587
-----
z^2 - 1.5263 z + 0.73372
```

Powyższe wyniki można zapisać równoważnie jak poprzednio w funkcji ujemnych potęg operatora q jako:

$$q \text{ jako: } \frac{B(q)}{F(q)} = \frac{1.0171q^{-1} + 0.4947q^{-2}}{1 - 1.4996q^{-1} + 0.70105q^{-2}}, \quad \frac{C(q)}{D(q)} = \frac{1 - 1.1527q^{-1} + 0.23587q^{-2}}{1 - 1.5263q^{-1} + 0.73372q^{-2}}$$

- b) Usunąć blok estymatora BJ w modelu `idsim` i wstawić na jego miejsce estymator OE z biblioteki *Simulink Library* otwieranej przyciskiem  (rozwinąć listę *System ID Blocks*, przeciągnąć do okna modelu `idsim` blok *Output-error model estimator*, uzupełnić połączenia sygnałów wejściowych i zadać w tym bloku *Sample time=1*). Prostszy model OE *nie dokonuje estymacji parametrów modelu szumu* (zakłada, że $C=D=1$).

Powtórzyć symulacje jak w pkt. a z parametrami nb , nf , nk opisującymi poprawnie strukturę podanych powyżej modeli BLACK BOX, czyli

- dla modelu 1: $nb=2, nf=2, nk=1$,
- dla modelu 2: $nb=2, nf=2, nk=2$,
- dla modelu 3: $nb=2, nf=2, nk=1$.

- ☞ Przy opracowaniu sprawozdania porównać wyniki identyfikacji w poszczególnych przypadkach pod kątem zgodności z parametrami układu rzeczywistego BLACK BOX i zależności jakości identyfikacji transmitancji (części deterministycznej modelu) i modelu szumu od:
- zgodności struktury estymatora z rzeczywistą strukturą układu,
 - rodzaju sygnału wejściowego $u(n)$,
 - wariancji i wartości średniej szumu $e(n)$.

3.3. Identyfikacja rekurencyjna (on-line) – schemat symulacyjny

W odróżnieniu od estymacji blokowej przeprowadzanej w pkt. 3.2, w identyfikacji rekurencyjnej estymaty parametrów modelu są aktualizowane w każdym okresie próbkowania. W analizowanym schemacie stosowana jest metoda RLS ze współczynnikiem zapominania starszych danych (*forgetting factor*).

- a) Otworzyć i zarejestrować model symulacyjny

```
>> idsimrec
```

Schemat realizuje identyfikację transmitancji $H(z) = \frac{z+0.5}{z^2-1.5z+0.7}$ z wejściem będącym sumą sygnału deterministycznego $u(n)$ i ciągu szumu gaussowskiego $\{e(n)\}$. Taki układ jest równoważny modelowi BJ z wielomianami $B=[0 \ 1 \ 0.5]$, $F=[1 \ -1.5 \ 0.7]$ i modelem szumu $C=B$, $D=F$ ($nb=2, nc=2, nd=2, nf=2, nk=1$), ponieważ szum przechodzi przez tę samą $H(z)$.

Symulacje przeprowadzić dla następujących przypadków:

- a.1. wejście $u(n)$ prostokątne (*Waveform=square*), brak szumu $e(n)$ (*Mean=0, Variance=0*),
- a.2. wejście $u(n)$ prostokątne, szum gaussowski $e(n)$ o średniej 0 i wariancji 0.2 (*Mean=0, Variance=0.2*),
- a.3. wejście $u(n)$ prostokątne, szum gaussowski $e(n)$ o średniej 0.1 i wariancji 0.1 (*Mean=0.1, Variance=0.1*),
- a.4. wejście $u(n)$ sinusoidalne (*Waveform=sine*), brak szumu (*Mean=0, Variance=0*),
- a.5. wejście $u(n)$ sinusoidalne, szum gaussowski $e(n)$ o średniej 0 i wariancji 0.2 (*Mean=0, Variance=0.2*).

Po każdej symulacji zarejestrować wykresy zmian estymowanych parametrów w czasie (*okno Parameter estimates*) i zanotować końcowe wartości parametrów licznika i mianownika (wielomianów B i F) podawane przez blok *Display*.

- ☞ Przy opracowaniu sprawozdania porównać wyniki estymacji w poszczególnych przypadkach pod względem zgodności z parametrami rzeczywistej transmitancji $H(z)$ i zależności jakości identyfikacji od:
- rodzaju sygnału wejściowego $u(n)$,
 - wariancji i wartości średniej szumu $e(n)$.

3.4. Identyfikacja rekurencyjna – wersje rekurencyjne metod estymacji

W tym punkcie identyfikacja przeprowadzana jest za pomocą komend estymacji rekurencyjnej Matlaba.

- a) Wczytać do edytora Matlaba plik skryptowy `idrec1.m` (**Open file** z belki menu Matlaba) i przeanalizować zawarte w programie komentarze. Uruchomić program

```
>> idrec1
```

Zarejestrować wykresy przebiegu estymacji dla modelu ARMAX o strukturze zgodnej z układem rzeczywistym, na podstawie którego generowane są dane do identyfikacji, oraz dla modelu OE, w którym nie estymuje się korelacji szumu. Z okna komend zanotować końcowe wartości estymat parametrów wielomianów i porównać je z wartościami odpowiednich parametrów układu rzeczywistego (wyświetlonymi wcześniej w oknie komend).

Uwaga: uruchomić program kilka razy i zwrócić uwagę na zależność wyników estymacji od wygenerowanej realizacji szumu wpływającej na dane.

- b) Wczytać do edytora Matlab'a plik skryptowy `idrec2.m` i przeanalizować go. Program ten pokazuje przykład wykorzystania rekurencyjnego algorytmu *rarx* w przypadku, kiedy kolejne dane dochodzą na bieżąco w kolejnych chwilach próbkowania. Zadane są początkowe wartości estymat potrzebne do uruchomienia algorytmu.

Uruchomić program

```
>> idrec2
```

Zarejestrować wykresy przebiegu estymacji dla modelu ARX oraz przebiegi prawdziwego i estymowanego sygnału wyjściowego. Model nie uwzględnia korelacji próbek szumu w układzie rzeczywistym.

4. Opracowanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy opisać zarejestrowane wyniki eksperymentów numerycznych i wyjaśnić problemy wskazane w poszczególnych punktach programu ćwiczenia.

Literatura

1. Niederliński A.: *Systemy komputerowe automatyki przemysłowej*, t.2 *Zastosowania*, WNT, 1985.
2. Niederliński A., Mościński J., Ogonowski Z.: *Regulacja adaptacyjna*, PWN, 1995.
3. Söderström T., Stoica P.: *Identyfikacja systemów*, PWN, 1997.
4. Zalewski A., Cegieła R.: *Matlab - obliczenia numeryczne i ich zastosowania*, Wyd. NAKOM, Poznań, 1996.

Opracował:

Dr inż. Janusz Baran