

LABORATORIUM CYFROWEGO PRZETWARZANIA SYGNAŁÓW

Ćwiczenie 3

Dyskretne sygnały stochastyczne - analiza widmowa i korelacyjna

1. Cel ćwiczenia

- Opanowanie podstawowych pojęć: funkcji korelacji i widma mocy stacjonarnego procesu stochastycznego.
- Przećwiczenie sposobów estymacji charakterystyk sygnałów stochastycznych i interpretacji wyników obliczeń komputerowych.
- Zapoznanie się z metodami analizy liniowych układów dyskretnych przetwarzających sygnały stochastyczne.

2. Podstawy teoretyczne

2.1. Pojęcia podstawowe

Pod pojęciem dyskretnego procesu (sygnału) stochastycznego $x(n)$ będziemy rozumieć zbiór funkcji $x_1(n)$, $x_2(n)$, ... będących realizacjami tego procesu (Rys. 1). Dla ustalonej chwili czasu (indeksu) n_1 wielkość $x(n_1)$ jest zmienną losową (wartością procesu losowego w chwili n_1), którą charakteryzuje funkcja gęstości prawdopodobieństwa $p_x(x_1, n_1)$ (PDF – *probability density function*). Obserwacjom podlegają jedynie *realizacje* zmiennych losowych, ale dalej nie będziemy stosować dla nich odrębnych oznaczeń i przez $x(n_k)$ będziemy rozumieć - w zależności od kontekstu - zmienną losową lub wartość jej realizacji.

Do pełnego opisu procesu losowego potrzebna jest znajomość wszystkich k -wymiarowych PDF zmiennych losowych $x(n_1), x(n_2), \dots, x(n_k)$ w dowolnie wybranych chwilach czasowych $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$. W wielu zagadnieniach praktycznych wystarczy wiedzieć, w jaki sposób właściwości procesu losowego $x(n)$ w punkcie $n=n_1$ zależą od jego właściwości w punkcie $n=n_2$. Do określenia tej zależności wystarcza znajomość dwuwymiarowej PDF $p_{xx}(n_1, n_2)$ zmiennych losowych $x(n_1)$ i $x(n_2)$ w chwilach n_1 i n_2 . Można wtedy wyznaczyć podstawowe wielkości, tzw. *statystyki*, opisujące sygnał stochastyczny.

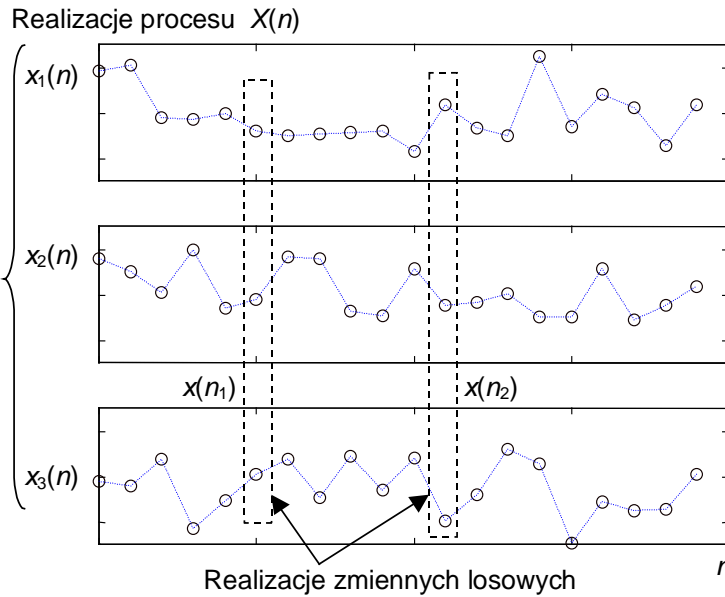
Najważniejsze wielkości charakteryzujące dyskretny proces losowy o wartościach rzeczywistych są następujące (wzory są podane dla procesów o wartościach ciągłych x oraz dyskretnych (skwantowanych) $x_i, i=1,2,\dots,M$; $p_x(x,n)$ – gęstość prawdopodobieństwa w chwili n)

- *Wartość średnia* (oczekiwana) procesu $x(n)$:

$$m_x(n) = E[x(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x, n) dx \quad \text{albo} \quad m_x(n) = E[x(n)] = \sum_i x_i p_x(x_i, n) \quad (2.1)$$

- *Średnia kwadratowa* (moc średnia) sygnału (gwiazdka oznacza wielkość sprzężoną):

$$P_x(n) = E[x^2(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_x(x, n) dx \quad \text{albo} \quad P_x(n) = E[x^2(n)] = \sum_i x_i^2 p_x(x_i, n) \quad (2.2)$$



Rys. 1. Ilustracja pojęcia: dyskretny proces stochastyczny

- Wariancja (moc składowej zmiennej):

$$\sigma_x^2(n) = \text{var}[x(n)] = E\{[x(n) - m_x(n)]^2\} = E[x^2(n)] - m_x^2(n) \quad (2.3)$$

- Funkcja autokorelacji zmiennych losowych $x(n_1)$ i $x(n_2)$ sygnału:

$$R_{xx}(n_1, n_2) = E[x(n_1)x(n_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(n_1)x(n_2)p_{xx}(x, n_1, n_2)dx(n_1)dx(n_2)$$

$$\text{albo } R_{xx}(n_1, n_2) = E[x(n_1)x(n_2)] = \sum_i \sum_j x_i x_j p_{xx}[x_i(n_1), x_j(n_2)] \quad (2.4)$$

(jest to prawdopodobieństwo łączne: $\text{Prob}[x(n_1)=x_i \wedge x(n_2)=x_j]$).

- Funkcja autokowariancji zmiennych losowych $x(n_1)$ i $x(n_2)$ sygnału:

$$C_{xx}(n_1, n_2) = E\{[x(n_1) - m_x(n_1)][x(n_2) - m_x(n_2)]\} \quad (2.5)$$

(dla sygnałów o zerowych wartościach średnich korelacja i kowariancja są sobie równe; w szczególności kowariancja $C_{xx}(n, n) = \sigma_x^2$).

W analogiczny sposób definiuje się funkcje korelacji i kowariancji wzajemnej dwóch sygnałów losowych $x(n)$ i $y(n)$, np. kowariancja wzajemna:

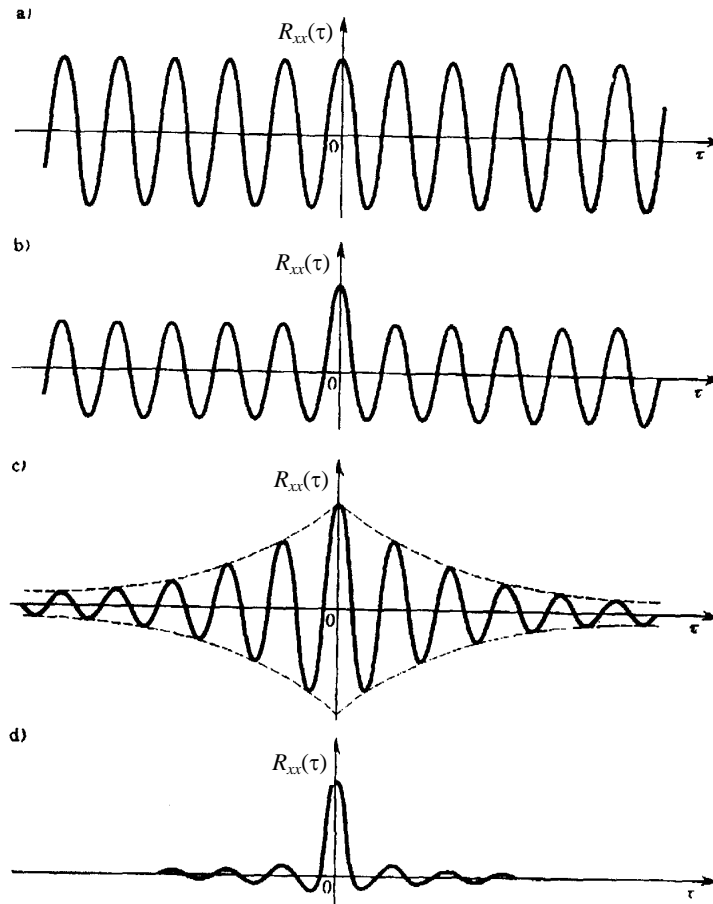
$$C_{xy}(n_1, n_2) = E\{[x(n_1) - m_x(n_1)][y(n_2) - m_y(n_2)]\} \quad (2.6)$$

Autokorelacja jest funkcją deterministyczną i najważniejszą wielkością charakteryzującą sygnał stochastyczny w dziedzinie czasu. Na Rys. 2 pokazane są przykładowe wykresy autokorelacji sygnałów różnego typu.

2.2. Sygnały stacjonarne i ergodyczne

Jeżeli statystyki procesu losowego nie zmieniają się w czasie, tzn. $p_x(x, n_1) = p_x(x, n_2)$, to nazywamy ten proces stacjonarnym. Ograniczymy się dalej do analizy procesów stacjonarnych w szerszym sensie, których rozkłady prawdopodobieństwa mogą się zmieniać w czasie, ale spełnione są następujące warunki:

- średnia $m_x(n) = m_x$ oraz wariancja $\sigma_x^2(n) = \sigma_x^2$ są stałe,
- autokorelacja $R_{xx}(n_1, n_2) = R_{xx}(n_2 - n_1) = R_{xx}(m)$ nie zależy od wyboru chwil n_1 i n_2 , a tylko od odległości $m = n_2 - n_1$ między zmiennymi losowymi $x(n_1)$ i $x(n_2)$, których wzajemne zależności (korelacje) są analizowane.



Rys. 2 Przebiegi funkcji autokorelacji sygnałów: a) sinusoidalnego, b) sinusoidalnego z szumem losowym, c) szumu wąskopasmowego, d) szumu szerokopasmowego

Wyznaczanie tzw. zespolonych statystyk (2.1)-(2.5) wymaga *uśredniania po realizacjach* procesu. Często jednak nie dysponujemy zbiorem realizacji procesu $\{x_k(n)\}$, $k=1,2,\dots$, ale pojedynczą realizacją (dla jednej wartości wskaźnika k), na podstawie której mamy wnioskować o właściwościach całego procesu $x(n)$. Zamiast uśredniania po realizacjach trzeba wtedy stosować *uśrednianie po czasie* dla obserwowanej realizacji $x(n)$ sygnału. Wymaga to skorzystania z tzw. *hipotezy ergodycznej*, czyli przyjęcia założenia, że dla badanego procesu *średnie po realizacjach są równe średnim czasowym*.

Zdefiniujemy średnie czasowe $\langle \cdot \rangle$ stacjonarnego sygnału losowego $x(n)$.

- wartość średnia:

$$\langle x(n) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) \quad (2.7)$$

- czasowa funkcja autokorelacji:

$$\langle R_{xx}(m) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)x(n+m) \quad (2.8)$$

Sygnał $X(n)$ nazywamy ergodycznym, jeżeli średnie czasowe są równe odpowiednim średnim statystycznym, tzn.:

$$\begin{aligned} \langle x(n) \rangle &= m_x = \text{const} \\ \langle R_{xx}(m) \rangle &= R_{xx}(m), \quad m = n_2 - n_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

W przeprowadzanych eksperymentach numerycznych będziemy operować na realizacjach sygnałów losowych i obliczać średnie czasowe skończonych ciągów próbek jako *estymaty* zespolonych statystyk sygnału.

2.3. Widmo mocy sygnału losowego

Jeżeli odległe w czasie zmienne losowe stacjonarnego sygnału dyskretnego $x(n)$ stają się od siebie niezależne, to zanika kowariancja sygnału: $\lim_{m \rightarrow \infty} C_{xx}(m) = 0$ i można wyznaczyć jej transformatę Z.

Obszar zbieżności transformaty zawiera okrąg jednostkowy $|z|=1$, a zatem istnieje odpowiednia transformata Fouriera dla $z=e^{j\Omega}$. *Widmowa gęstość mocy (widmo mocy)* $P_{xx}(\Omega)$ jest transformatą Fouriera kowariancji sygnału $x(n)$:

$$P_{xx}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{xx}(m)e^{-jm\Omega} \quad (2.10)$$

gdzie $\Omega=\omega/f_s$ jest pulsacją kątową unormowaną względem częstotliwości próbkowania $f_s=1/T_s$. **Widmo mocy jest najważniejszą wielkością opisującą właściwości sygnału losowego w dziedzinie częstotliwości.** W przypadku sygnałów o zerowej wartości średniej ($m_x=0$) autokowariancję w (2.10) można zastąpić równoważną autokorelacją $R_{xx}(m)$. Funkcja $P_{xx}(\Omega)$ określa wtedy moc sygnału przypadającą na jednostkę unormowanej pulsacji Ω .

Właściwości widma mocy:

- $P_{xx}(\Omega)$ jest funkcją okresową o okresie 2π ,
- jeżeli $x(n)$ jest sygnałem o wartościach rzeczywistych, to jego widmo mocy jest funkcją nieujemną i parzystą, tzn. $P_{xx}(\Omega)=P_{xx}(-\Omega)$,
- całka oznaczona widma mocy sygnału o zerowej średniej ($m_x=0$)

$$\int_{\Omega_1}^{\Omega_2} P_{xx}(\Omega)d\Omega$$

określa moc średnią moc sygnału w zakresie pulsacji $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$. Całka obliczona w całym zakresie częstotliwości określa całkowitą moc (energię) sygnału.

Znając widmo mocy można określić wartości autokowariancji jako współczynniki rozwinięcia widma w szereg Fouriera:

$$C_{xx}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\Omega)e^{jm\Omega} d\Omega \quad (2.11)$$

W szczególności dla $m=0$ zależność (2.11) określa wariancję sygnału $\sigma_x^2 = C_{xx}(0)$.

W analogiczny sposób definiuje się widmo mocy wzajemnej dwóch sygnałów:

$$P_{xy}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{xy}(m)e^{-jm\Omega} \quad (2.12)$$

2.4. Klasyczne metody estymacji autokowariancji i widma mocy

W wielu zastosowaniach praktycznych właściwości procesu losowego $X(n)$ trzeba oceniać na podstawie znajomości tylko jednej jego realizacji $x(n)$ obserwowanej w skończonym przedziale czasu. Powstaje więc problem estymacji (oszacowania) wartości średniej, wariancji, funkcji kowariancji (korelacji) i widma mocy na podstawie skończonego ciągu N próbek $x_0(n)$, $n=0,1,\dots,N-1$. Zakłada się przy tym, że analizowany sygnał jest stacjonarny (w szerszym sensie) i ergodyczny.

Najczęściej stosowane estymatory (oznaczane symbolami z daszkiem) z próbek są określone w sposób następujący:

- estymator wartości średniej (największej wiarygodności):

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad (2.13)$$

- estymator (największej wiarygodności) wariancji sygnału o nieznannej wartości średniej:

$$\hat{\sigma}_x^2 = E[\text{var}(x)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - \hat{m}_x]^2 \quad (2.14)$$

- estymator funkcji autokorelacji (również autokowariancji w przypadku sygnału o zerowej wartości średniej, $m_x=0$):

$$\hat{R}_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n) \cdot x(n+m), \quad -(N-1) \leq m \leq N-1 \quad (2.15)$$

Dzielenie sumy przez faktyczną liczbę składników daje nieobciążoną estymatę autokorelacji

$$\hat{R}_{xx}(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n) \cdot x(n+m), \quad -(N-1) \leq m \leq N-1 \quad (2.15a)$$

- estymator widma mocy PSD (wyliczany na podstawie estymatora korelacji w przypadku $m_x=0$):

$$\hat{P}_{xx}(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}_{xx}(m) e^{-jm\Omega} \quad (2.16)$$

Zauważmy, że dla różnych realizacji procesu losowego (różnych pomiarów) otrzymamy różne wartości lub przebiegi funkcji estymatorów, ponieważ one same są zmiennymi losowymi (\hat{m}_x i $\hat{\sigma}_x^2$) lub procesami losowymi ($\hat{R}_{xx}(\Omega)$ i $\hat{P}_{xx}(\Omega)$).

2.5. Jakość estymacji

Przypuśćmy, że pewien (nieznany) parametr α procesu stochastycznego oceniamy wyznaczając jego estymator $\hat{\alpha}$. Jakość estymatora ocenia się na podstawie oszacowania jego dwóch parametrów:

- obciążenia estymatora (ang. *bias*): $B(\hat{\alpha}) = \alpha - E[\hat{\alpha}]$ (2.17)

- wariancji estymatora: $\text{var } \hat{\alpha} = E[(\hat{\alpha} - E[\hat{\alpha}])^2] = \sigma_{\hat{\alpha}}^2$ (2.18)

Obciążenie jest odchyleniem wartości oczekiwanej estymatora od rzeczywistej wartości parametru, a wariancja - miarą skupienia wartości estymatora wokół przeciętnej $E[\hat{\alpha}]$. Dobry estymator powinien mieć jak najmniejsze obciążenie i wariancję (najlepiej równe zero). Często estymator o małym obciążeniu ma dużą wariancję lub na odwrót. Z tego powodu jakość estymatora ocenia się podając błąd średniokwadratowy

$$E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2] = B^2 + \sigma_{\hat{\alpha}}^2 \quad (2.19)$$

uwzględniający oba wymienione wskaźniki jakości. Wymaga się, aby estymator był zgodny, tzn. zbieżny do wartości rzeczywistej estymowanego parametru przy liczbie próbek $N \rightarrow \infty$ (obciążenie i wariancja dążące do 0):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob}(\hat{\alpha}_N = \alpha) = 1 \quad (2.20)$$

Zastosujemy opisane wskaźniki jakości estymacji do oceny estymatorów z próbek przedstawionych w pkt.2.4 dla stacjonarnego gaussowskiego procesu stochastycznego:

- estymator wartości średniej (2.13) jest nieobciążony, a jego wariancja $\text{var}[\hat{m}_x] = \sigma_x^2 / N$ (gdzie σ_x^2 jest rzeczywistą wariancją procesu), a więc estymator jest zgodny,
- estymator wariancji (2.14) jest obciążony: $B[\hat{\sigma}_x^2] = (N-1)\sigma_x^2 / N$, a jego wariancja $\text{var}[\hat{\sigma}_x^2]$ jest proporcjonalna do $1/N$, jest to zatem estymator zgodny,
- estymator (2.15) funkcji autokorelacji jest obciążony:

$$B[\hat{R}_{xx}(m)] = \frac{|m|}{N} R_{xx}(m) \quad (2.21)$$

(widać, że błąd estymacji jest duży na krańcach rekordu danych, tzn. dla $|m| \rightarrow N$), a jego wariancja $\text{var}[\hat{R}_{xx}(m)]$ jest proporcjonalna do $R_{xx}^2(m) / N$. W związku z tym niekiedy stosuje się nieobciążony estymator autokorelacji (kompensujący błędy na krańcach rekordu danych)

$$\hat{R}_{xx}^*(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n) \cdot x(n+m), \quad (2.22)$$

ale błąd średniokwadratowy takiego estymatora jest większy niż dla estymatora (2.15).

- estymator widma mocy (2.16) *nie jest estymatorem zgodnym*, jest obciążony, a jego wariancja

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}(\Omega)] = P_{xx}^2(\Omega) \left[1 + \left(\frac{\sin N\Omega}{N \sin \Omega} \right)^2 \right] \quad (2.23)$$

jest proporcjonalna do kwadratu estymowanego widma. Właściwości te sprawiają, że fluktuacje wokół prawdziwych wartości widma mocy są duże i nie maleją w miarę zwiększania liczby próbek N . Są to wady, które dyskwalifikują estymator (2.16) jako użyteczne narzędzie obliczeniowe.

2.6. Periodogram jako estymata widma mocy

Ponieważ, jak widzieliśmy, transformata Fouriera (2.16) zgodnej estymaty kowariancji nie jest zgodnym estymatorem PSD (tzn. nie dąży do wartości prawdziwych przy wzroście liczby próbek N), w praktyce stosuje się metody, które pomijają etap estymacji funkcji $\hat{R}_{xx}(m)$ i umożliwiają estymację widma bezpośrednio z ciągu próbek $x(n)$ poddawanych dyskretnemu przekształceniu Fouriera DFT.

Obliczanym w ten sposób estymatorem widma mocy jest *periodogram* zdefiniowany jako:

$$I_N(\Omega_m) = \hat{P}_{xx}(\Omega_m) = \frac{1}{N} |X(e^{j\Omega_m})|^2 \quad (2.24)$$

gdzie $X(e^{j\Omega_m}) = DFT[x(n)]$. Estymacja widma mocy metodami cyfrowymi sprowadza się więc do wyznaczenia (najczęściej za pomocą algorytmu FFT) periodogramu ciągu próbek $x(n)$, $n=0,1,\dots,N-1$, dla skończonego zbioru pulsacji $\Omega_m = \frac{2\pi m}{N}$, $m=0,1,\dots,N-1$. Stosując przekształcenie odwrotne

$IDFT[I_N(\Omega_m)]$ można wyznaczyć estymatę funkcji autokorelacji $\hat{R}_{xx}(m)$.

Periodogram jest estymatorem PSD niezgodnym i o dużej wariancji: $\text{var}[I_N(\Omega)] \cong P_{xx}^2(\Omega)$, co daje „poszarpane” obrazy widma mocy niezależnie od liczby próbek.

2.7. Uśrednianie periodogramów – estymacja z wygładzaniem widma

W celu uzyskania zgodnego estymatora PSD, czyli zmniejszenia wariancji estymacji przy wzroście liczby próbek N , stosuje się *uśrednianie pewnej liczby niezależnych periodogramów* (metoda Bartletta).

Procedura obliczeniowa jest następująca:

- Ciąg danych $\{x(n): n=0,1,\dots,N-1\}$ dzieli się na K segmentów $x^{(i)}(n)$, $i=1,2,\dots,K$ o długości M każdy ($N=KM$).
- Oblicza się K krótszych periodogramów $I_M^{(i)}(\Omega_m) = \frac{1}{M} |DFT[x^{(i)}(n)]|^2$.
- Wyznacza się estymatę Bartletta PSD w postaci:

$$\hat{P}_{xx}^B(\Omega_m) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K I_M^{(i)}(\Omega_m) \quad (2.25)$$

W przypadku, kiedy periodogramy są od siebie niezależne, wariancja estymaty Bartletta

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}^B(\Omega)] = \frac{1}{K} \text{var}[I_M(\Omega)] \approx \frac{1}{K} P_{xx}^2(\Omega) \quad (2.26)$$

a obciążenie jest większe niż dla pojedynczego dłuższego periodogramu. Estymata (2.25) jest więc zgodna, co oznacza *wygładzenie widma* przy wzroście N , ale ze względu na krótsze segmenty danych *pogarsza się rozdzielczość częstotliwościowa estymaty*.

Ulepszoną metodą uśredniania *zmodyfikowanych* periodogramów jest metoda Welch. Modyfikacja polega na nałożeniu na segmenty danych *przed* obliczaniem periodogramów okna czasowego różnego od prostokątnego. Zmodyfikowane periodogramy mają postać:

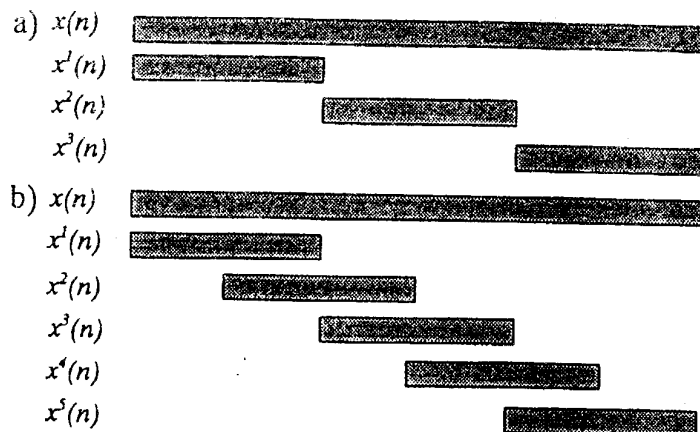
$$I_M^{(i)W}(\Omega_m) = \frac{1}{MF} |DFT[x^{(i)}(n) \cdot w(n)]|^2 \quad (2.27)$$

gdzie $w(n)$ jest funkcją okna czasowego, a F jest czynnikiem normującym energię (jest to energia sygnału okna)

$$F = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} w^2(k) \quad (2.28)$$

niezbędnym do zapewnienia asymptotycznej nieobciążoności (przy $K \rightarrow \infty$).

W celu zwiększenia liczby segmentów K (zmniejszenia wariancji estymatora) bez zmniejszania ich długości M (tzn. rozdzielczości widmowej) stosuje się podział na segmenty nakładające się na siebie (*overlapping*, Rys. 3). Periodogramy stają się wtedy jednak zależne od siebie, co zwiększa wariancję. Zależność periodogramów segmentów zachodzących na siebie jest mniejsza po nałożeniu na segmenty (przed obliczeniem periodogramów) okien dążących do zera na krańcach (np. okna Hanninga). Powoduje to, że metoda Welch z nakładaniem się segmentów zapewnia estymację o mniejszej wariancji w porównaniu z metodą Bartletta.



Rys. 3. Podział ciągu danych na segmenty do wyznaczania krótszych periodogramów:
a) segmenty nie nakładające się, b) segmenty nakładające się

2.8. Przetwarzanie sygnałów stochastycznych przez liniowy układ dyskretny

Dyskretny układ (filtr) liniowy z wejściem $x(n)$ i wyjściem $y(n)$ może być w pełni scharakteryzowany przez podanie jego transmitancji dyskretniej:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (2.29)$$

przy zerowych warunkach początkowych. Transmitancja filtra stanowi transformatę Z jego charakterystyki impulsowej $h(n)$ (odpowiedzi na sygnał $x(n)=1$ dla $n=0$ i $x(n)=0$ dla $n \neq 0$):

$$H(z) = Z[h(n)] \quad (2.30)$$

Sygnał na wyjściu układu jest splotem sygnału na jego wejściu i charakterystyki impulsowej:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (2.31)$$

Charakterystyka widmowa $H(e^{j\Omega})$ filtra jest transmitancją $H(z)$ obliczaną dla $z = e^{j\Omega}$ (na okręgu jednostkowym). Charakterystyka amplitudowa filtra stanowi moduł $A(\Omega) = |H(e^{j\Omega})|$, a charakterystyka fazowa argument $\varphi(\Omega) = \arg[H(e^{j\Omega})]$ charakterystyki widmowej.

Jeżeli sygnał wejściowy $x(n)$ jest sygnałem stochastycznym o znanej średniej, wariancji i funkcji autokorelacji, to (w *stanie ustalonym* po odpowiednio długim czasie od pojawienia się wymuszenia) sygnał wyjściowy $y(n)$ jest również sygnałem stochastycznym o parametrach zależnych od parametrów sygnału wejściowego i od charakterystyki widmowej (lub impulsowej) filtra.

Pomiędzy statystykami sygnału wejściowego i wyjściowego zachodzą w *stanie ustalonym* następujące zależności:

- wartość średnia sygnału losowego na wyjściu:

$$m_y = H(e^{j0})m_x \quad (2.32)$$

- funkcja autokorelacji procesu wyjściowego:

$$R_{yy}(m) = R_{xx}(m) * v(m), \quad \text{gdzie } v(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h(n+k) = h(m) * h(-m) \quad (2.33)$$

- jeżeli sygnał wejściowy ma zerową wartość średnią ($m_x=0$), a transformatę Z funkcji autokorelacji dowolnego sygnału $y(n)$ oznaczmy jako $S_{yy}(z)=Z[R_{yy}(m)]$, to:

$$S_{yy}(z) = H(z) \cdot H(1/z) \cdot S_{xx}(z), \quad (2.34)$$

a widmo mocy $P_{yy}(\Omega) = S_{yy}(z)|_{z=e^{j\Omega}}$ sygnału wyjściowego:

$$P_{yy}(\Omega) = |H(e^{j\Omega})|^2 P_{xx}(\Omega) \quad (2.35)$$

- funkcja korelacji wzajemnej sygnałów wejściowego i wyjściowego:

$$R_{xy}(m) = h(m) * R_{xx}(m) \quad (2.36)$$

skąd wynika, że funkcja widma mocy wzajemnej (w ogólności funkcja zespolona)

$$P_{xy}(\Omega) = H(e^{j\Omega})P_{xx}(\Omega) \quad (2.37)$$

Szczególną rolę jako sygnał pobudzający wejście filtra odgrywa tzw. *szum biały*, wyidealizowany sygnał losowy, który ma tę właściwość, że kolejne próbki *nie są ze sobą skorelowane*, tzn.

$$R_{xx}(m) = \begin{cases} \sigma_x^2 & \text{dla } m = 0 \\ 0 & \text{dla } m \neq 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Widmo mocy szumu białego ma w całym zakresie częstotliwości wartość stałą:

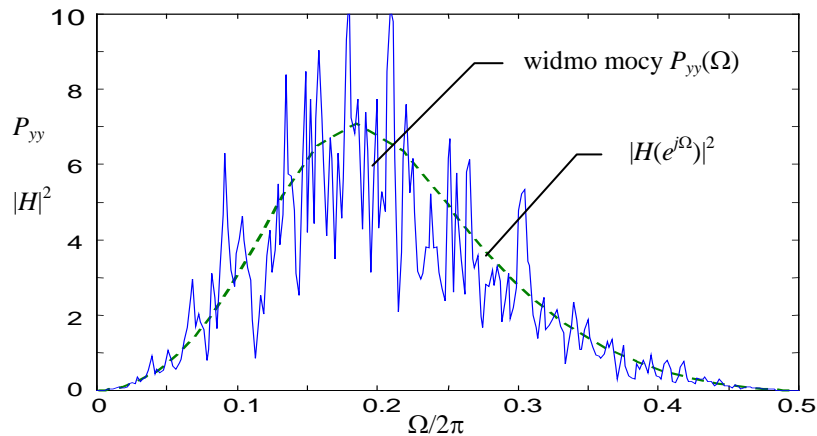
$$P_{xx}(\Omega) = \sigma_x^2 \quad \text{dla } -\pi \leq \Omega \leq \pi \quad (2.39)$$

- W analizie procesów losowych szum biały jest w pewnym sensie odpowiednikiem deterministycznego sygnału impulsowego (impulsu jednostkowego w przypadku sygnałów dyskretnych w czasie).
- Zależność (2.35) stanowi podstawę do *modelowania* sygnałów losowych o określonym widmie mocy („kolorowych”) za pomocą szumu białego przepuszczanego przez stabilny układ liniowy o odpowiedniej transmitancji (Rys. 4).
- Na podstawie (2.37) można wyznaczyć zależność pozwalającą na *identyfikację* charakterystyki widmowej nieznanego układu dyskretnego na podstawie obserwacji realizacji sygnałów losowych na wejściu i wyjściu (teoretycznie najlepszym sygnałem wejściowym jest szum biały, ponieważ obejmuje całe pasmo częstotliwości i pobudza wszystkie składowe dynamiki układu):

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{P_{xy}(\Omega)}{P_{xx}(\Omega)}. \quad (2.40)$$

Przykład: Na wejście filtra o transmitancji $H(z)=0.5[1+z^{-1}]$ podawany jest szum biały. Równanie różnicowe wiążące wyjście z wejściem filtra ma postać: $y(n)=0.5[x(n)+x(n-1)]$. Próbkę $y(n)$ i $y(n+1)$

sygnału losowego na wyjściu zależą więc od tej samej próbki $x(n)$ sygnału wejściowego, a zatem są ze sobą skorelowane, co oznacza, że $R_{yy}(1) \neq 0$. Wartości funkcji autokorelacji $R_{yy}(m) = 0$ dla $m > 1$.



Rys. 4 Widmo mocy szumu na wyjściu filtra środkowoprzepustowego o transmitancji $H(z)$ pobudzanego szumem białym o wariancji $\sigma_x^2 = 1$

2.9. Detekcja sygnału w szumie - filtr dopasowany do sygnału

Filtry dopasowane są filtrami optymalnymi z punktu widzenia zdolności do wykrywania impulsu sygnału użytecznego $s(n)$ w silnym szumie. Stanowią one m.in. jeden z podstawowych elementów układów odbiorników w systemach transmisyjnych oraz radarach.

Charakterystykę impulsową filtra *dopasowanego do sygnału* deterministycznego $s(n)$ o skończonym czasie trwania równym $N+1$ określa się jako sprzężenie sygnału odwrócone w czasie (w przypadku zespolonych sygnałów modulowanych należy wziąć zespolone sprzężenie $s^*(-n)$):

$$h(n) = s(-n), \quad n = 0, 1, \dots, N \tag{2.41}$$

Aby otrzymać filtr przyczynowy charakterystykę tę należy przesunąć o N względem sygnału (Rys. 5):

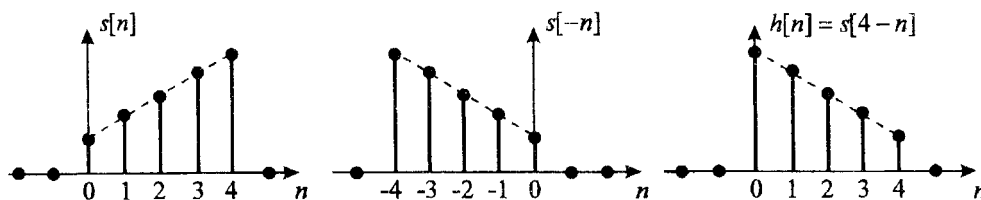
$$h(n) = s(N-n). \tag{2.42}$$

Sygnał na wyjściu filtra pobudzanego sygnałem, do którego filtr jest dopasowany, jest (zgodnie z (2.31) równe:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)s(n-k) = \sum_{k=0}^n s(N-k)s(n-k) \tag{2.43}$$

Dla $n=N$ otrzymujemy na wyjściu wartość maksymalną równą energii impulsu $s(n)$:

$$y(N) = \sum_{k=0}^N s(N-k)s(N-k) = \sum_{m=0}^N |s(m)|^2 \tag{2.44}$$



Rys. 5 Sygnał $s(n)$ o skończonej długości ($N=4$) i odpowiedź impulsowa $h(n)=s(N-n)$ przyczynowego filtra FIR dopasowanego do sygnału $s(n)$

A zatem w określonej chwili ($n=N$) czasu próbka sygnału wyjściowego określa energię sygnału użytecznego (maksymalną wartość funkcji korelacji sygnału dopasowanego i wejściowego) i wtedy

odpowieź filtra osiąga maksimum, niezależnie od kształtu impulsu. W układach radarowych wysyłane impulsy stanowią sygnał $s(n)$, który wraca do anteny w formie opóźnionej $s(n-n_0)+\text{szum}$. Wyjście filtra dopasowanego osiąga wtedy maksimum dla $n=N+n_0$.

Największą efektywność detekcji uzyskuje się dla impulsów $s(n)$, których autokorelacja bardzo szybko zanika do zera. Filtr dopasowany reaguje wtedy bardzo skupionym impulsem wyjściowym. Właściwość taką ma stosowana w układach radarowych funkcja „chirp” (sinusoida z liniowo modulowaną częstotliwością), której ciągła wersja ma postać:

$$s(t) = p(t)e^{j\pi\frac{W}{T}t^2}, \quad p(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \end{cases} \quad (2.45)$$

gdzie $2T$ jest czasem trwania impulsu, a W – szerokością przemiatanego zakresu częstotliwości.

3. Obliczenia komputerowe - zadania do wykonania wg instrukcji

Uwaga:

- Bloki instrukcji Matlaba do realizacji poszczególnych zadań wygodnie jest kopiować do edytora Matlaba i tam dokonywać edycji parametrów, dopisywania nowych linii itp., a następnie uruchamiać jako skrypty komendą **Run** ▷.
 - Przy przechodzeniu do następnego punktu ćwiczenia zwracać uwagę, żeby nie dochodziło do ewentualnego nakładania się na siebie w tym samym oknie wykresów różnych wielkości. Normalnie rysowanie nowego wykresu kasuje poprzednią zawartość otwartego okna, o ile ta zawartość nie została przeznaczona do zachowania za pomocą instrukcji `hold on` (domyślne `hold off` kasuje poprzednią zawartość pola wykresu w otwartym oknie). Wstawianie `hold on` jest potrzebne, kiedy instrukcja zaleca nakładanie na siebie dla porównania kilku wykresów tej samej wielkości otrzymanych przez powtarzanie jakiegoś bloku instrukcji dla różnych wartości pewnych parametru(-ów). Po zakończeniu danego zadania takie okna wykresów należy zamykać.
 - Do projektowania filtrów wykorzystywane są funkcje biblioteki Matlaba **Signal Processing Toolbox**. Listing funkcji zapisanej w formie skryptu można otrzymać w oknie komend za pomocą instrukcji `type nazwa_funkcji`.
- W oknie **Current Folder** przejść do folderu **Moje dokumenty/MATLAB/DSP**. Jest to folder roboczy dla ćwiczeń z *Cyfrowego przetwarzania sygnałów*.

3.1. Klasyczne metody estymacji widma mocy i autokorelacji

Eksperymenty będą przeprowadzane na przykładzie sygnału losowego będącego szumem białym o rozkładzie normalnym (Gaussa). Pseudolosowy ciąg próbek (wektor wierszowy) o długości N pochodzących ze standardowego rozkładu normalnego (o średniej $m_x=0$ i wariancji $\sigma_x^2=1$) można w Matlabie wygenerować za pomocą polecenia:

```
x = randn(1,N);
```

Ze względu na losowe generowanie realizacji sygnałów uzyskiwane w ćwiczeniu wyniki *nie są* w dokładnie powtarzalne.

Estymatę funkcji autokorelacji $R_{xx}(m)$ wektora x sygnału oblicza funkcja

```
Rxx = xcorr(x);
```

(`help xcorr` daje pełny opis z opcjonalnymi dodatkowymi parametrami).

A. Wygenerować macierz $R=20$ realizacji białego szumu gaussowskiego o długości $L=200$ próbek każda. *Poszczególne realizacje $x(n)$ są wierszami macierzy X .*

```
R = 20;           % liczba realizacji (wierszy)
L = 200;         % liczba próbek w realizacji
X = randn(R,L); % macierz realizacji (każdy wiersz to jedna realizacja)
xav = mean(X);  % realizacja uśredniona (średnie każdej kolumny X)
disp('Wariancje poszczególnych realizacji')
varx = var(X)' % wariancje każdej realizacji
disp('Wariancja realizacji uśrednionej')
varxav = var(xav)
[Rxx,m] = xcorr(xav,'coeff'); % autokorelacja realizacji uśrednionej

subplot(311)
plot(X(1,:))
title('Realizacja procesu normalnego')
ylabel('x(n)')
axis([0 L -3 3])
subplot(312)
plot(xav);
title('Proces uśredniony po realizacjach dla każdego n')
axis([0 L -3 3])
xlabel('n'), ylabel('x_{av}(n)')
subplot(313)
plot(m,Rxx)
```

```
title('Unormowana autokorelacja realizacji usrednionej')
ylabel('R_{xx}(m) / R_{xx}(0)'), xlabel('lag m')
```

Uwaga: Rozciągnąć otrzymane okno wykresów w pionie dla uzyskania lepszej widoczności.

- Porównać na wykresach zakres zmienności pojedynczej realizacji oraz realizacji uśrednionej (uśrednianie następuje po *kolumnach* macierzy X , czyli po realizacjach zmiennych losowych $x(n)$ dla ustalonego indeksu n), a w oknie komend Matlaba porównać obliczone dla nich wartości wariancji.
- Jaki jest teoretyczny stosunek zakresu zmienności pojedynczej realizacji do zmienności realizacji uśrednionej oraz stosunek wariancji pojedynczej realizacji do wariancji realizacji uśrednionej. Jak te stosunki zależą od R ?
- Zaobserwować symetrię estymaty autokorelacji $\hat{R}_{xx}(m)$ sygnału uśrednionego (unormowanej tak, aby $\hat{R}_{xx}(0)=1$). Jaki jest teoretyczny przebieg funkcji autokorelacji?

B. Wyznaczyć estymaty funkcji gęstości widmowej mocy w formie *periodogramów* poszczególnych realizacji sygnałów losowych wygenerowanych w poprzednim punkcie oraz periodogram uśredniony po jednakowych pulsacjach obliczonych periodogramów (które mieszczą się w wierszach macierzy PER).

```
... (macierz X z poprzedniego punktu)
N=256; % długość DFT do obliczania periodogramu
[R,L]=size(X);
PER=zeros(R,ceil(N/2)+1); % zakres częstotl. tylko do pi (lub fs/2)
for i=1:R
    [PER(i,:),fp]=periodogram(X(i,:));
end
PERav = mean(PER); % periodogram uśredniony
disp('Wariancje periodogramów poszczególnych realizacji')
varPER = var(PER)
disp('Wariancja periodogramu uśrednionego')
varPER = var(PERav)

subplot(211)
plot(fp/pi,PER(1,:)) % wykres przykładowego periodogramu
axis([0,1,0,2])
ylabel('I_p (\Omega) (1/rad)')
title('Periodogram realizacji x(n) - estymator widma mocy P_{xx}(\Omega)')
subplot(212)
plot(fp/pi,PERav)
axis([0,1,0,2])
title('Periodogram uśredniony')
xlabel('\Omega / \pi'), ylabel('I_{pav}(\Omega) (1/rad)')
```

Funkcja obliczania periodogramu wektora próbek:

```
[Ip,f] = periodogram(x>window,nfft,fs)
```

(help periodogram daje pełny opis z opcjonalnymi dodatkowymi parametrami: window - typ okna o długości length(x), nfft - liczba punktów DFT, fs - częstotliwość próbkowania).

Wyniki: gęstość mocy $I_p(f)$ (dB/Hz) w zakresie częstotliwości $0 \leq f \leq f_s/2$ (Hz) (lub w (dB/rad) w zakresie unormowanym $0 \leq f \leq \pi$ w przypadku braku f_s). Periodogram jest obliczany wg wzoru (2.24) i wartości dzielone są przez f_s w Hz lub przez 2π w przypadku częstotliwości unormowanej.

- W oknie komend Matlaba porównać wariancje periodogramu jednej z realizacji oraz periodogramu stanowiącego ich średnią. Jaki jest teoretyczny stosunek tych wariancji i jak zależy on od R ?

C. Przeanalizować charakter zmian w rozdzielczości i stopniu "poszarpania" periodogramów wynikających ze zwiększenia:

- długości L generowanych realizacji procesu:

```
R = 10; % liczba realizacji (wierszy)
```

```
L = 1024;          % liczba próbek w realizacji
N = L;            % liczba punktów DFT
X = randn(R,L);  % macierz realizacji (każdy wiersz to jedna realizacja)
PER=zeros(R,ceil(N/2)+1);
... (itd. jak wyżej)
```

- liczby realizacji R :

```
R = 200;          % liczba realizacji (wierszy)
L = 256;          % liczba próbek w realizacji
N = L;            % liczba punktów DFT
... (itd. jak wyżej)
```

- Czy zwiększenie liczby próbek L w realizacji wpływa na wariancję periodogramu? W jaki sposób uśrednianie po większej liczbie realizacji R zmienia wariancję periodogramu uśrednionego?

Do praktycznego wyznaczenia estymaty widma mocy $P_{xx}(\Omega)$ stosuje się metody (Bartletta i Welch) podziału ciągu próbek na segmenty (które mogą na siebie zachodzić) i uśredniania obliczonych dla nich krótszych periodogramów. Realizuje je funkcja:

```
[Pxx, f] = pwelch(x,window,noverlap,nfft,fs);
```

gdzie: x - wektor próbek sygnału, $window$ - typ i długość M okna segmentu danych; w metodzie Bartletta stosuje się okno prostokątne `boxcar(M)`, w metodzie Welch okno Hanninga: `hann(M)`, `noverlap` – liczba nakładających się próbek sąsiednich segmentów, `nfft` - liczba punktów DFT, `fs` - częstotliwość próbkowania. Wyniki: gęstość mocy $P_{xx}(f)$ w (dB/Hz), częstotliwość $0 \leq f \leq f_s/2$ (Hz) (lub w (dB/rad) w zakresie $0 \leq f \leq \pi$ w przypadku braku f_s).

- D.** Obliczyć estymaty widma mocy rekordu próbek sygnału, stanowiącego sumę szumu normalnego i składowej harmonicznej, w formie periodogramu całego rekordu oraz z uśrednianiem periodogramów krótszych segmentów metodą Bartletta (okno prostokątne, segmenty nie zachodzą na siebie). Wyniki przedstawić w skali liniowej oraz w dB/Hz (jednostki logarytmiczne).

```
N=1024;          % długość rekordu (realizacji)
M=128;          % długość segmentu
novlap=0;       % obszar nakładania się segmentów
nfft=256;       % długość DFT w segmentach
A=0.4;          % amplituda składowej harmonicznej
fs=1;           % częstotl. próbkowania
noise=randn(1,N); % generowanie szumu
sinus=sin(2*pi*0.2*[0:N-1]); % sinusoida, częstotl. unormowana f0/fs=0.2
x = A*sinus + noise; % sinusoida + sygnał losowy
[Per,fp]=periodogram(x,[],[],fs); % periodogram z domyślnymi: window,nfft
% Metoda Bartletta: segmenty nie nakładają się, okno prostokątne
[Pxxb,fb] = pwelch(x,boxcar(M),novlap,nfft,fs);

subplot(211)
plot(fp,Per,'c--',fb,Pxxb,'b')
axis([0,fs/2,0,15]);
title('skala pionowa liniowa')
ylabel('P_{xx}(f) (1/Hz)');
subplot(212)
plot(fp,10*log10(Per),'c--',fb,10*log10(Pxxb),'b')
axis([0,fs/2,-20,20]);
title('skala pionowa w dB')
ylabel('P_{xx}(f) (dB/Hz)', xlabel('f (Hz)'))
legend('periodogram całego rekordu','uśrednianie periodogramów
met.Bartletta')
```

- Porównać wariancję periodogramu i estymaty Bartletta oraz rozdzielczość częstotliwościową (szerokość prążków) i amplitudową otrzymanych widm mocy (względną wysokość prążka reprezentującego składową harmoniczną).
- Zwrócić uwagę na skalowanie osi częstotliwości w jednostkach fizycznych (Hz).

- Metoda Bartletta jest szczególnym przypadkiem metody Welch – stąd zastosowanie funkcji `pwelch`.
- Dlaczego przy przejściu do skali logarytmicznej (dB/Hz) widma mocy występuje przeliczenie $10 \cdot \log_{10}(P_{xx})$ (a nie $20 \cdot \log_{10}(P_{xx})$) jak miało to miejsce w przypadku charakterystyk amplitudowych filtrów)?

E. Obliczyć estymaty widma mocy rekordu próbek sygnału, stanowiącego sumę szumu normalnego i składowej harmonicznej, w formie periodogramu całego rekordu oraz z uśrednianiem periodogramów krótszych segmentów metodą Welch (okno Hanninga, segmenty zachodzą na siebie). Wyniki przedstawić w skali liniowej oraz w dB/Hz (jednostki logarytmiczne).

```

...
novlap=64;           % obszar nakładania się segmentów
...
[Per,fp]=periodogram(x,[],[],fs); % periodogram całego rekordu
[Pxxb,fb] = pwelch(x,boxcar(M),0,nfft,fs); % metoda Bartletta
% Metoda Welch: segmenty nakładają się, okno Hanninga
[Pxxw,fw] = pwelch(x,hann(M),novlap,nfft,fs);

figure(1)
subplot(211)        % Wyniki w skali liniowej
plot(fp,Per)
axis([0,fs/2,0,15]);
title('Periodogram całego rekordu')
ylabel('I_p(f) (1/Hz)')
subplot(212)
plot(fb,Pxxb,':',fw,Pxxw)
axis([0,fs/2,0,15]);
title('Uśrednianie periodogramów segmentów')
legend('bez nakładania','z nakładaniem się segmentów')
xlabel('f (Hz)'), ylabel('P_{xx}(f) (1/Hz)')
figure(2)           % Wyniki w skali logarytmicznej
subplot(211)
plot(fp,10*log10(Per))
axis([0,fs/2,-20,20]);
title('Periodogram całego rekordu')
ylabel('I_p(f) (dB/Hz)')
subplot(212)
plot(fb, 10*log10(Pxxb),':',fw, 10*log10(Pxxw))
title('Uśrednianie periodogramów segmentów')
xlabel('f (Hz)'), ylabel('P_{xx}(f) (dB/Hz)')

```

- Porównać wariancje i rozdzielczości estymat widma mocy otrzymanych metodami Welch i Bartletta.
- Na ile segmentów dzieli się rekord próbek w metodzie Welch (dla zadanych wartości M i $novlap$), a na ile w metodzie Bartletta ($novlap=0$)?
- Powtórzyć obliczenia dla segmentów dwukrotnie dłuższych ($M=256$) i skomentować różnice.

F. Weryfikacja właściwości estymat $\hat{R}_{xx}(m)$ funkcji autokorelacji opisanych we wprowadzeniu teoretycznym. Wyznaczyć 3 warianty estymaty korelacji:

- estymatę obciążoną wg wzoru (2.15) unormowaną tak, że $\hat{R}_{xx}(0)=1$,
- estymatę nieobciążoną wg wzoru (2.15a) unormowaną,
- jako odwrotną transformatę Fouriera IDFT periodogramu sygnału.

a) Wyznaczyć estymaty autokorelacji sygnału deterministycznego harmonicznego o długości N . Sygnał deterministyczny służy jako sygnał testowy właściwości estymat, ponieważ jego autokorelację można wyliczyć analitycznie.

```

N=256;           % długość sygnału
f0=0.05;        % częstotl. f/fs sygnału harmonicznego
x=sin(2*pi*f0*[0:N-1]); % deterministyczny sygnał harmoniczny

```

```

[Rbias,m]=xcorr(x,'coeff');           % 1) estymata obciąż. unorm.: suma / N
[Runbias,m]=xcorr(x,'unbiased');     % 2) estymata nieobciąż.: suma / N-|m|
Runbias=Runbias/Runbias(N);

nfft=2*N;           % długość FFT
lag=0:nfft-1;
lag=fshift(lag,nfft);           % do zakresu symetrycznego
Ip=periodogram(x,[],nfft,'twosided'); % periodogram dwustronny [0,2*pi)
Ridft=fftshift(real(iff(Ip))); % 3) estymata obciąż. jako IDFT periodogramu
Ridft=Ridft/Ridft(lag==0);           % unormowanie

subplot(311)
plot(m,Rbias)
axis([-N,N,-1,1.2]),
ylabel('R_{xx}(m) (biased)')
subplot(312)
plot(m,Runbias,'r')
axis([-N,N,-1,1.5]),
ylabel('R_{xx}(m) (unbiased)')
subplot(313)
plot(lag,Ridft,'g')
axis([-N,N,-1,1.2]),
ylabel('R_{xx}(m) = IDFT(I_p)')
xlabel('lag m')

```

Uwaga: Rozciągnąć otrzymane okno wykresów w pionie dla uzyskania lepszej widoczności.

➤ Jaka jest teoretyczna funkcja autokorelacji sygnału sinusoidalnego? Która z wyznaczonych estymat jest z nią zgodna?

b) Wyznaczyć estymaty autokorelacji sygnału losowego nieskorelowanego szumu normalnego.

```

...
x=randn(1,N);           % normalny szum biały
...

```

➤ Jaka jest teoretyczna funkcja autokorelacji szumu białego? Która z wyznaczonych estymat jest z nią zgodna?

c) Wyznaczyć estymaty autokorelacji *sumy* sygnału harmonicznego i szumu białego.

```

...
x=0.8*sin(2*pi*f0*[0:N-1])+randn(1,N); % sygnał harmoniczny + szum biały
...

```

➤ Przeanalizować wyniki dla poszczególnych sygnałów. Która estymata jest lepsza dla sygnału deterministycznego, a która dla losowego i dlaczego (zakładając, że rzeczywiste sygnały są nieograniczonych w czasie)?

➤ Wyjaśnić, skąd biorą się wartości zerowe na krańcach przedziału estymaty obciążonej i dlaczego estymata nieobciążona autokorelacji szumu białego ma dużą (fałszywą) wariancję na krańcach przedziału?

3.2. Przetwarzanie sygnału losowego przez układ liniowy

W tym punkcie badane będą odpowiedzi liniowego układu dyskretnego o transmitancji $H(z)$ postaci (2.29) na pobudzenie sygnałem losowym (szumem białym). Transmitancja $H(z) = B(z)/A(z)$ opisuje filtr o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR). Jeśli wielomian w mianowniku $A(z)=1$, to mamy do czynienia z filtrem o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR), którego wszystkie bieguny są równe zero.

➤ Zamknąć okna wykresów i wyczyścić przestrzeń roboczą (*Workspace*) i okno komend Matlaba:

```
clear all, close all, clc
```

A. Zaobserwować efekty przetwarzania standardowego szumu białego o rozkładzie normalnym ($m_x=0, \sigma_x^2=1$) przez filtr LP NOI II rzędu ($H(z)=B(z)/A(z)$ z $B=[b_0, b_1, b_2]$, $A=[a_0, a_1, a_2]$).

```

B = [0 0 0.25]; A=[1 -1 0.25]; % współczynniki transmitancji filtra
filtr = filt(B,A,1) % utworzenie modelu filtra H(z^-1), Ts=1
[h,n] = impulse(filtr,40); % ch-ka impulsowa h(n) filtra (40 próbek)
[M, faza, Wf] = dbode(B,A,1); % ch-ka częstotl. Bodego filtra, Ts=1

L = 500; % liczba próbek sygnału wejściowego filtra
x = randn(1,L); % wymuszenie w postaci szumu gaussowskiego
y = filter(B,A,x); % obliczenie odpowiedzi filtra na wymuszenie x

figure(1)
subplot(211) % ch-ka impulsowa filtra
stem(n,h),
xlabel('n'), ylabel('h(n)'),
title('Charakterystyka impulsowa filtra')
subplot(212) % ch-ka amplitudowa filtra
plot(Wf/pi, M), % skala liniowa wzmocnienia
grid on,
xlabel('\Omega / \pi'), ylabel('|H(\Omega)|'),
title('Charakterystyka amplitudowa filtra')
figure(2) % przebiegi sygnałów x i y
subplot(211)
plot(x)
ylabel('x(n)')
title('Przebiegi sygnałów: wejściowego i wyjściowego filtra')
subplot(212)
plot(y,'r')
xlabel('n'), ylabel('y(n)')

```

- Z okna komend Matlaba zapisać transmitancję filtra. Z czym związane są początkowe zerowe wartości odpowiedzi impulsowej filtra?
- Wyznaczyć estymatę obciążoną autokorelacji (unormowaną do $R_{yy}(0)=1$) i widmo mocy P_{yy} (estymacja metodą Welch) losowego sygnału *wyjściowego* $y(n)$ filtra.

Uwaga: Wygodnie jest dołączyć poniższe linie kodu na koniec przedstawionych powyżej i uruchamiać całość jako jeden skrypt. Skrypt należy uruchomić kilkakrotnie dla tych samych wartości parametrów, żeby zaobserwować, czy istotne cechy wyników nie są zależne od konkretnej realizacji szumu losowego przez funkcję randn.

```

no=40; % pominięcie no początk. próbek stanu nieustalonego filtra
win=hann(128); novlap=64; % parametry do pwelch()
[Ryy,m] = xcorr(y(no:L),'coeff'); % autokorelacja sygnału wyjśc.
[Pyy,W] = pwelch(y(no:L),win,novlap); % widmo mocy sygnału wyjśc.

figure(3)
subplot(211)
plot(m,Ryy,'r'),
axis([-200,200,min(Ryy),max(Ryy)]), % zoom osi w otoczeniu Ryy(0)
xlabel('m'), ylabel('R_{yy}(m)'),
title('Autokorelacja i widmo mocy sygnału y(n)');
subplot(212)
plot(Wf/pi,M.^2/pi,':', W/pi,Pyy,'r') % skala liniowa
axis([0,1,0,max(Pyy)])
legend('|H(\Omega)|^2', 'P_{yy}(\Omega)')
ylabel('P_{yy}(\Omega) (1/rad)'), xlabel('\Omega / \pi')

```

- Zwrócić uwagę na pomijanie w obliczaniu R_{yy} i P_{yy} początkowych próbek sygnału y , kiedy na wyjściu panuje stan nieustalony (o długości zależnej od długości odpowiedzi impulsowej filtra)
- Czy wykresy autokorelacji i widma mocy sygnału wyjściowego są zgodne z zależnościami (2.33) i (2.35)? Co dzieje się z nieskorelowanym szumem białym x po przejściu przez filtr?
- Powtórzyć obliczenia dla filtra NOI o charakterystyce pasmowoprzepustowej z wyznaczeniem jak poprzednio estymaty autokorelacji i widma mocy sygnału losowego po przetworzeniu przez filtr


```
B = [1,0,-1]; A=[1,-cos(pi/3),0.25]; % współczynniki transmitancji filtra
filtr = firlt(B,A,1) % utworzenie modelu filtra H(z^-1), Ts=1
...
[Ryy,m] = xcorr(y,'coeff'); % autokorelacja sygnału wyjśc.
```

- Sprawdzić zgodność przebiegu widma mocy sygnału wyjściowego filtra z kształtem kwadratu charakterystyki amplitudowej. Czy wariancja (nierówności) wykresu estymaty widma mocy zależy od wartości mocy (czyli poziomu wykresu) jak przewiduje wzór (2.26)?
- Zrobić *zoom* najbardziej interesującego zakresu funkcji autokorelacji wokół $m=0$ przeskalowując oś OX górnego wykresu. Ile próbek autokorelacji ma wartość znacząco różną od zera (jak się to ma do przebiegu charakterystyki impulsowej filtra?)

```
figure(3), subplot(211)
axis([-30,30,min(Ryy),max(Ryy)])
```

B. Badanie koloryzowania szumu białego przez filtr SOI LP N -tego rzędu.

```
N=20; W0=0.3; % rząd i pulsacja nominalna filtra SOI
B = fir1(N,W0,'low',hamming(N+1)); A=1; % projektowanie filtra SOI LP
filtr = firlt(B,A,1) % utworzenie modelu filtra H(z^-1), Ts=1
...
```

- Przedstawić i zarejestrować wykres widma mocy sygnału wyjściowego w skali logarytmicznej (w dB/rad):

```
figure(3)
...
subplot(212)
plot(Wf/pi,10*log10(M/pi),':', Wf/pi,10*log10(Pyy),'r') % skala w dB/rad
axis([0,1,-80,max(Pyy)])
...
ylabel('P_{yy}(\Omega) (dB/rad)')
```

- Powtórzyć obliczenia dla filtra SOI HP (górnoprzepustowego) z wykresem widma mocy w skali logarytmicznej (w dB/rad) jak poprzednio:

```
N=20; W0=0.6; % rząd i pulsacja nominalna filtra SOI
B = fir1(N,W0,'high',hamming(N+1)); A=1; % projektow. filtra SOI HP
filtr = firlt(B,A,1) % utworzenie modelu filtra H(z^-1), Ts=1
...
```

- Zrobić *zoom* najbardziej interesującego zakresu funkcji autokorelacji wokół $m=0$ przeskalowując oś OX górnego wykresu (jak wyżej).

3.3. Identyfikacja nieznanego układu liniowego

Zadanie polega na wyznaczeniu estymaty *charakterystyki częstotliwościowej* nieznanego filtra na podstawie pomiaru sygnałów wejściowego i wyjściowego filtra i wyznaczeniu widma mocy na wejściu oraz widma mocy wzajemnej pomiędzy wejściem a wyjściem filtra (wzór (2.40)). Jest to tzw. identyfikacja *nieparametryczna*. Do jej przeprowadzenia służy procedura

- Zamknąć okna wykresów i wyczyścić przestrzeń roboczą (*Workspace*) i okno komend Matlaba

A. Przeprowadzić identyfikację charakterystyki amplitudowej filtra LP NOI Butterwortha, na wejście którego podany jest szum biały o rozkładzie normalnym.

```
N=4; f0=0.4; % rząd i częstotl. nominalna filtra
[B,A]=butter(N,f0); % wyzn. transmitancji filtra LP Butterwortha
filtr = firlt(B,A,1) % utworzenie modelu filtra H(z^-1), Ts=1
L=500; % długość wektora danych
[H,Wf]=freqz(B,A,L); % obliczanie ch-ki filtra na podst. transmitancji
x = randn(1,L); % generowanie sygn. wejśc. x(n) - szum biały
```

```

y = filter(B,A,x);          % obliczanie odpowiedzi y(n) filtra na x(n)
no=50;                      % pominięty czas trwania stanu nieustalonego
win=hann(256); ovlap=128;   % parametry do tfestimate()
[Hes,Wes]=tfestimate(x(no:L),y(no:L),win,ovlap);% estymacja H(W) met.Welcha
[Pxx,Wxx] = pwelch(x,win,ovlap); % widmo autokorelacji Pxx (widmo mocy)

figure(1)                   % przebiegi sygnałów x i y do estymacji
subplot(311)
plot(no:L,x(no:L))
ylabel('x(n)')
title('Przebiegi sygnałów: wejściowego i wyjściowego filtra')
subplot(312)
plot(no:L,y(no:L),'r')
xlabel('n'), ylabel('y(n)')
subplot(313)                % widmo mocy Pxx sygnału wejśc. filtra
plot(Wxx/pi,10*log10(Pxx))
ylabel('10 log P_{xx}(\Omega)'), xlabel('\Omega / \pi'),
axis([0,1,-100,10])
figure(2);                  % estymata ch-ki amplitudowej
subplot(211)
plot(Wf/pi, 20*log10(abs(H)),':', Wes/pi, 20*log10(abs(Hes)),'r')
axis([0,1,-160,20]);
title('Identyfikacja ch-ki częstotliwościowej układu')
ylabel('20 log |P_{xy}(\Omega) / P_{xx}(\Omega)|'),
subplot(212)
plot(Wf/pi, unwrap(angle(H))*180/pi,':',...
      Wes/pi,unwrap(angle(Hes))*180/pi,'r')
ylabel('faza P_{xy}(\Omega) / P_{xx}(\Omega)'),
xlabel('\Omega / \pi'),
legend('rzeczywista odp. częstotl. filtra H(\Omega)',...
      'estymata P_{xy}(\Omega) / P_{xx}(\Omega)')

```

Uwaga: Skrypt należy uruchomić kilkakrotnie dla tych samych wartości parametrów, żeby ustalić, czy istotne cechy wyników nie są zależne od konkretnej realizacji szumu losowego przez funkcję randn.

➤ Powtórzyć obliczenia dla przypadku identyfikacji charakterystyki filtra SOI.

```

N=14; f0=0.4;              % rząd i częstotl. nominalna filtra
B=firl(N,f0,'low'); A=1;  % wyzn. transmitancji filtra LP SOI
filtr = filt(B,A,1)       % utworzenie modelu filtra H(z^{-1}), Ts=1
...

```

➤ Czy charakterystyki estymowane dobrze pokrywają się z rzeczywistymi w całym zakresie częstotliwości? Zauważyć, że w danych do funkcji estymacji tfestimate ponownie pomija się no początkowych próbek sygnałów (stan nieustalony).

B. Przeprowadzić obliczenia dla przypadku, kiedy szum na wejściu ma widmo mocy *nie pokrywające całego zakresu częstotliwości* (nie jest szumem białym). Widmo mocy szumu zostanie ograniczone przez przepuszczenie szumu białego przez filtr LP.

```

...
x = randn(1,L);           % generowanie sygn. wejśc. x(n) - szum biały
B1 = firl(20,0.5,'low'); A1=1; % filtr do zawężenia pasma szumu wejśc.
x = filter(B1,A1,x);     % ograniczenie widma mocy szumu białego
y = filter(B,A,x);       % obliczanie odpowiedzi y(n) filtra na x(n)
...

```

➤ Dlaczego estymata charakterystyki rzeczywistej nie jest w tym przypadku poprawna w zakresie wysokich częstotliwości? Porównać zakres poprawnej estymacji z pasmem szumu wejściowego.

➤ Powtórzyć eksperyment z sygnałem sinusoidalnym na wejściu filtra, którego charakterystyka jest estymowana.

```

...
f0=0.1;

```

```
x=sin((0:L-1)*pi*f0); % deterministyczna sinusoida o częstotl. f0
y = filter(B,A,x); % obliczanie odpowiedzi y(n) filtra na x(n)
...
```

- Jaka jest poprawność identyfikacji w tym przypadku i dlaczego? Jaka jest szerokość pasma sygnału wejściowego?

3.4. Badanie korelacji wzajemnej sygnałów

Eksperyment jest ilustracją analizy korelacyjnej dwóch sygnałów $x(n)$ i $y(n)$, gdzie $y(n)$ (sygnał odbierany) jest opóźnioną w czasie i zakłóconą szumem losowym wersją $x(n)$ (sygnał wysyłany), który zawierał znany impuls $s(n)$ o skończonym czasie trwania. Analiza korelacji wzajemnej obu sygnałów pozwala na określenie opóźnienia wystąpienia impulsu w sygnale $y(n)$.

- Zamknąć okna wykresów i wyczyścić przestrzeń roboczą (*Workspace*) i okno komend Matlaba

A. Przeprowadzić analizę korelacyjną dla różnych poziomów (wariancji) losowego szumu zakłócającego w przypadku, kiedy impuls $s(n)$ jest sygnałem sinusoidalnym. Opóźnienie impulsu w sygnale $y(n)$ jest równe $n_0=200$ próbek.

```
vars=0.01; % wariancja szumu zakłócającego, sqrt(vars) = odchyl. standard.
A=1.0; f0=0.05; % amplituda i częstotl. unormowana sygnału okresowego
M=160; % długość impulsu s(n) w sygnale
s = A*sin(pi*f0*[0:M-1]);

L=400; % długość całego sygnału
no=200; % opóźnienie impulsu
x=zeros(1,L); % pusty sygnał oryginalny x
xdel=x; % pusty sygnał opóźniony
x(1:M)=s; % impuls użyteczny s(n) w sygnale x(n)
xdel(no+1:no+M)=s; % impuls opóźniony o no próbek
y = xdel + sqrt(vars)*randn(1,L); % sygnał opóźniony + zakłócenie
[Rxy,lag]=xcorr(x,y,'coeff'); % korelacja wzajemna Rxy unormowana
[Rmax,m]=max(abs(Rxy)) % maksimum korelacji i jego położenie m

subplot(311)
plot(x), hold on
plot(xdel,'c'), hold off
ylabel('x(n), x(n-n_0)');
subplot(312)
plot(y),
xlabel('n'), ylabel('y=x(n-n_0)+szum');
subplot(313)
plot(lag,Rxy,'r'), ylabel('korelacja R_{xy}(m)'),
xlabel('lag m')
```

Uwaga: Skrypt należy uruchomić kilkakrotnie dla tych samych wartości parametrów, żeby ustalić, czy istotne cechy wyników nie są zależne od konkretnej realizacji szumu losowego przez funkcję `randn`. Okno wykresów rozciągać w pionie w celu poprawienia widoczności.

- W oknie komend sprawdzić, czy przesunięcie m , dla którego wartość korelacji wzajemnej R_{xy} jest największa, jest równe (lub bliskie) symulowanemu opóźnieniu n_0 .
- Przeprowadzić obliczenia dla zwiększającej się wariancji szumu zakłócenia $vars=0.1, 1, 2$ itd. i zaobserwować, do jakiego poziomu szumu (a dokładnie stosunku mocy sygnału do mocy zakłócenia SNR – *signal-to-noise ratio* w dB) położenie maksimum korelacji R_{xy} dla $m=n_0$ jest wyraźne i nie tonie w zakłóceniach. Zwrócić uwagę na różnicę skali pionowej wykresów x i y .
- Powtórzyć obliczenia z $vars=2$ dla przypadku, impuls $s(n)$ zawiera dwie składowe sinusoidalne i porównać wyniki.

```
vars=2.0; % wariancja szumu zakłócającego, sqrt(vars) = odchyl. standard.
A=[0.7 0.7]; f0=[0.05 0.2]; % wektory amplitud i częstotl. składowych
```

```
s = A*sin(pi*f0'*[0:M-1]);
...
```

B. Przeprowadzić eksperyment jak w pkt. A dla różnych wariacji losowego szumu zakłócającego w przypadku, kiedy impuls $s(n)$ jest sygnałem o liniowo modulowanej częstotliwości (LFM – *Linear Frequency Modulated*, wzór (2.45)).

```
vars=0.01; % wariancja szumu zakłócającego
M=160; % długość impulsu s(n) w sygnale
f1=0.2; % pocz. i końcowa częstotl. unormowana LFM
s=chirp(0:M-1,-f1,M-1,f1); % impuls LFM chirp
...
```

➤ Zwrócić uwagę na impulsowy charakter funkcji korelacji wzajemnej. Czy taki skupiony przebieg ułatwia prawidłowe określenie położenia maksimum przy dużym natężeniu szumu zakłócającego?

3.5. Detekcja znanego sygnału impulsowego w szumie – filtr dopasowany

Zagadnienie polega na wykrywaniu znanego sygnału $s(n)$ o skończonym czasie trwania w obecności addytywnego szumu przy pomocy filtra dopasowanego do $s(n)$. Charakterystyka impulsowa filtra dopasowanego $h(n)=s^*(-n)$ (sprzężenie i odwrócenie w czasie, charakterystyka ta określa jednocześnie współczynniki transmitancji filtra SOD).

➤ Zamknąć okna wykresów i wyczyścić przestrzeń roboczą (*Workspace*) i okno komend Matlaba

A. Przeanalizować rezultaty filtracji filtrem dopasowanym dla różnych wariacji losowego szumu zakłócającego w przypadku, kiedy impuls $s(n)$ jest sygnałem LFM. Opóźnienie impulsu w sygnale wejściowym filtra jest równe $n_0=500$ próbek. Ze względu na przyczynową odpowiedź impulsową filtra maksymalna wartość sygnału wyjściowego powinna wystąpić dla $n=n_0+M$ (czyli po wejściu całego opóźnionego impulsu do filtra).

```
vars=1; % wariancja szumu zakłócającego
M=400; % długość impulsu
f1=0.1; % pocz. i końcowa częstotl. unormowana impulsu LFM
s=chirp(0:M-1,-f1,M-1,f1); % impuls LFM chirp
L=1000; % długość sygnału
no=500; % opóźnienie impulsu w sygnale wejściowym filtra
sdel=zeros(1,L); sdel(no+1:no+M)=s; % sygnał opóźniony o no próbek
noise= sqrt(vars)*randn(1,L); % szum biały o wariancji vars
x = sdel + noise; % wej.filtra dopasowanego: s(n-no) + szum
h=conj(s(M:-1:1)); % odp. impuls. filtra przyczynowego dopasowanego do s(n)
Y=fft(h,L+M-1).*fft(x,L+M-1); % obliczanie wyj.filtra w dziedzinie częstotl.
y=real(ifft(Y)); % sygnał wyjśc. filtra dopasowanego
disp('ymax i wyznaczone opóźnienie:')
[ymax,n]=max(abs(y)) % maksimum wyjścia filtra i jego położenie n

subplot(311)
plot(real(sdel), ylabel('s(n-n_0)'));
title('Impuls opóźniony (bez szumu)');
subplot(312)
plot(real(x), ylabel('x(n)'));
title('Wejście i wyjście filtra dopasowanego do s(n)');
subplot(313)
plot(y, 'r'),
xlabel('n'), ylabel('y(n)')
```

Uwaga: Skrypt należy uruchomić kilkakrotnie dla tych samych wartości parametrów, żeby ustalić, czy istotne cechy wyników nie są zależne od konkretnej realizacji szumu losowego przez funkcję `randn`. Okno wykresów powiększać w celu poprawienia widoczności.

➤ Do jakiej wartości wariacji `vars` szumu położenie maksimum wyjścia filtra dopasowanego jest wyraźne i nie tonie w zakłóceniach. Z okna komend odczytywać moment pojawienia się maksymalnej wartości na wyjściu filtra. Zwrócić uwagę na *kompresję impulsu* na wyjściu i różnicę

skali pionowej wykresów x i y . Określić, jaka jest minimalna wartość SNR (kwadrat amplitudy $s(n)$ do wariancji szumu w dB) umożliwiająca jeszcze wykrycie sygnału w szumie.

➤ Zwrócić uwagę na:

- tworzenie odpowiedzi impulsowej filtra dopasowanego przez odwrócenie w czasie impulsu $s(n)$ połączone ze sprzężeniem zespolonym (nie ma to znaczenia dla sygnałów rzeczywistych).
- szybkie obliczanie całego rekordu próbek wyjścia filtra przez mnożenie transformat FFT o długości $L+M-1$ (długość sygnału wejściowego + długość odpowiedzi impulsowej filtra – 1) w dziedzinie częstotliwości i obliczanie transformaty odwrotnej. Sprawdzić i skomentować wynik dla transformat o długości sygnału wejściowego L .

B. Przeprowadzić obliczenia dla impulsu $s(n)$ w formie wycinka sinusoidy i porównać wyniki (możliwość detekcji i skupienie impulsu na wyjściu filtra).

```
vars=1;      % wariancja szumu zakłócającego
M=400;      % długość impulsu
A=1.0; f0=0.05; % amplituda i częstotl. unorm. impulsu
s=A*sin(pi*f0*[0:M-1]); % impuls z harmonicznym sygnałem użytecznym
...
```

4. Zadania do realizacji samodzielnej

Zadanie 4.1. Wyznaczyć spektrogram sygnału chirp (kilka tysięcy próbek) o częstotliwości modulowanej liniowo i kwadratowo z addytywnym (dodanym) szumem białym o rozkładzie normalnym, wartości średniej $m=0.5$ i wariancji $\sigma^2=0.5$. Patrz: dokumentacja **Help** funkcji Matlab'a `spectrogram` i `chirp`. Dobrać odpowiednio parametry sygnału i prezentacji wyniku.

Zadanie 4.2. Wyznaczyć i przedstawić graficznie spektrogram sygnału dźwiękowego zapisanego w formie pliku wav zadanego przez prowadzącego.

5. Opracowanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy zawrzeć zarejestrowane wyniki eksperymentów przeprowadzonych według instrukcji oraz zadanych przez prowadzącego zadań do realizacji samodzielnej z odpowiednimi opisami oraz wyjaśnieniami opartymi na wiedzy z wykładu i literatury, ze szczególnym uwzględnieniem problemów wskazanych symbolem ➤.

Literatura

1. Ingle V.K., Proakis J.G.: *Essentials of Digital Signal Processing Using Matlab*, 3 ed., Cengage Learning, 2012.
2. Mitra S.K.: *Digital Signal Processing. A Computer Based Approach*, 4 ed., McGraw-Hill, 2011.
3. Leis J.W.: *Digital Signal Processing Using Matlab for Students and Researchers*, John Wiley & Sons, 2011.
4. Orfanidis S.J.: *Introduction to Signal Processing*, Prentice Hall, 2010.
5. Zieliński T.: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań*, WKiŁ, 2005.
6. Smith S.W.: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Praktyczny poradnik dla inżynierów i naukowców*, Wyd. BTC, 2007.
7. Lyons R.G.: *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, WKiŁ, 1999.
8. Chaparro L.F.: *Signals and Systems Using Matlab*, Academic Press, 2011.

Opracował: Dr inż. Janusz Baran

Częstochowa, 1999-2013