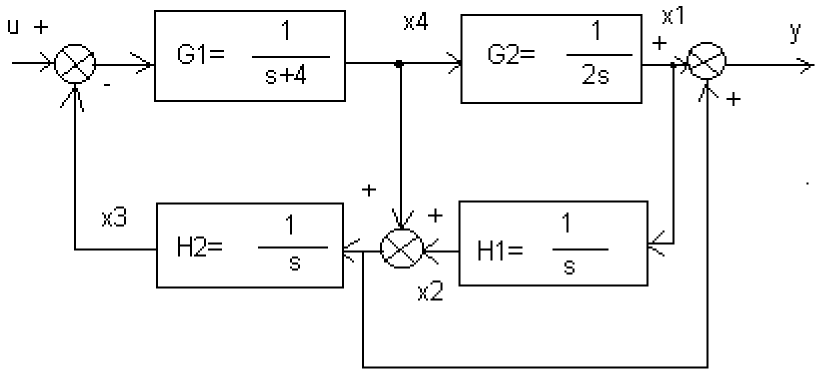
ANALIZA SCHEMATÓW BLOKOWYCH
OPIS UKŁADÓW ZA POMOCĄ ZMIENNYCH STANU

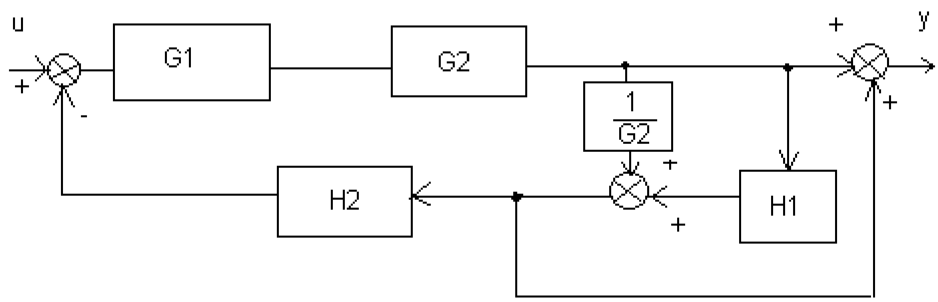
Zadanie 1 (Zmienne stanów i schematy blokowe układów)

Problem:
Wyznaczyć transmitancję od u do y układu:

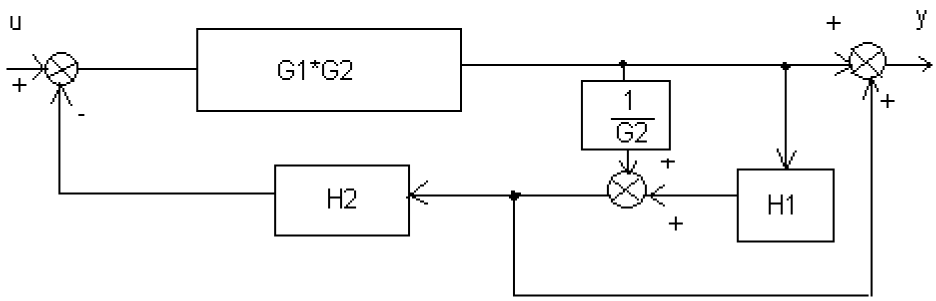


Rozwiązanie:

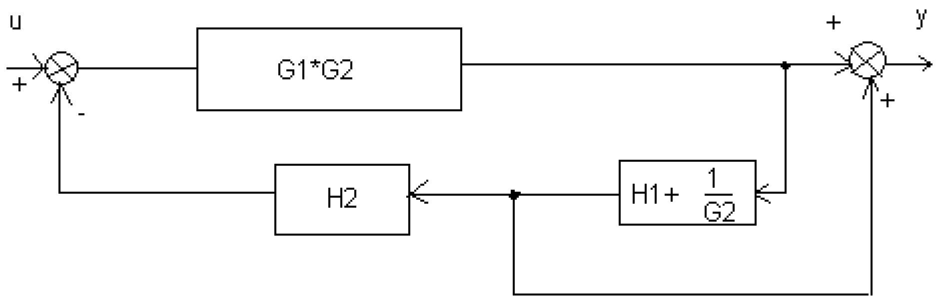
1) Przesuwamy węzeł za blok G2:



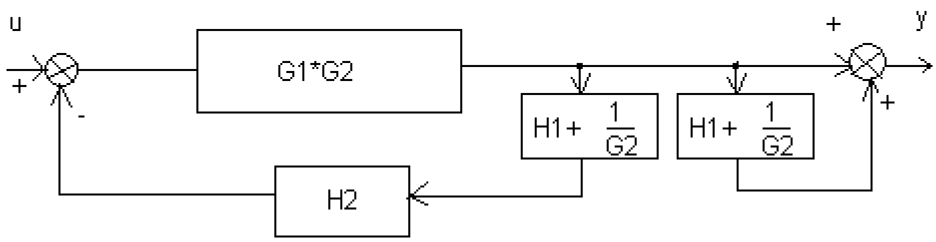
2) Łączymy szeregowo G1 i G2 :



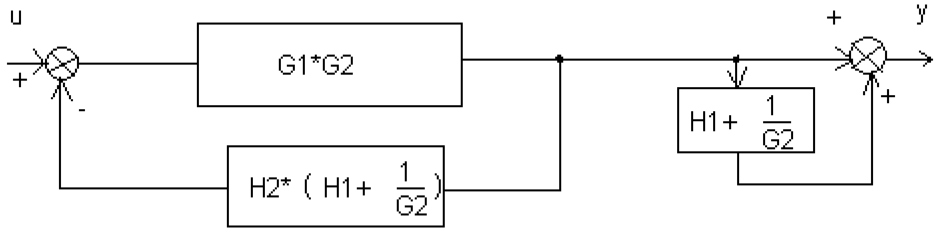
3) Łączymy równolegle H1 i 1/G2:



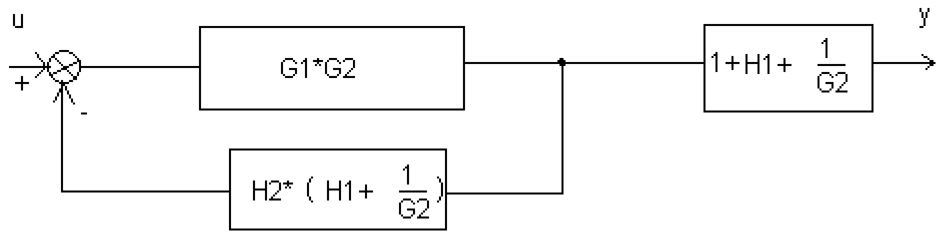
4) Przesuwamy węzeł przed blok H1+1/G2:



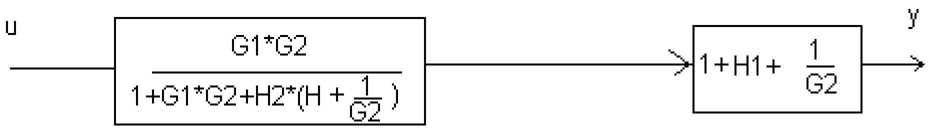
5) Łączymy szeregowo H2 i H1 + 1/G2:



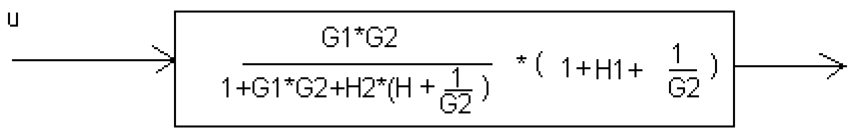
6) Upraszczamy połączenie równoległe po prawej stronie:



7) Upraszczamy sprzężenie zwrotne:



8) Łączymy szeregowo pozostałe dwa układy:

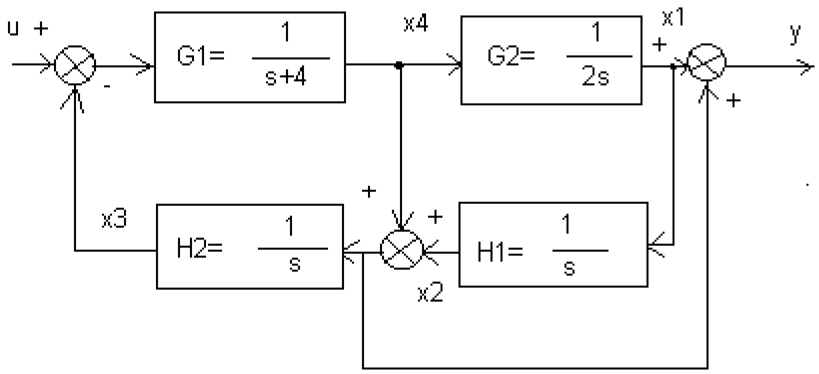


Po podstawieniu poszczególnych transmitancji do wzoru otrzymamy transmitancje wypadkową:

$$G(s) = \frac{2s^2 + s + 1}{2s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 1}$$

Zadanie 2 (Zmienne stanów i schematy blokowe układów)

Problem:
Napisać równanie stanu i równania wyjścia dla zmiennych stanu z rysunku:



Rozwiązanie:

$$\begin{cases} x_1 = G_2 \cdot x_4 = \dfrac{1}{2s} \cdot x_4 \\ x_2 = H_1 \cdot x_1 = \dfrac{1}{s} \cdot x_1 \\ x_3 = H_2 \cdot (x_2 + x_4) = \dfrac{1}{s} \cdot (x_2 + x_4) \\ x_4 = G_1 \cdot (u - x_3) = \dfrac{1}{s+4} \cdot (u - x_3) \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} s \cdot x_1 = \dfrac{1}{2} \cdot x_4 \\ s \cdot x_2 = x_1 \\ s \cdot x_3 = x_2 + x_4 \\ s \cdot x_4 + 4 \cdot x_4 = u - x_3 \Rightarrow s \cdot x_4 = -x_3 - 4 \cdot x_4 + u \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2} \cdot x_4(t) \\ x_2(t) &= x_1(t) \\ x_3(t) &= x_2(t) + x_4(t) \\ x_4(t) &= -x_3(t) - 4 \cdot x_4(t) + u(t) \end{aligned} \qquad (3)$$

Równanie stanu:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{1}{2}\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&-1&-4\end{bmatrix}}_{A}*\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}}_{B}*u \qquad (4)$$

Równanie wyjścia:

$$y=C\cdot x+D\cdot u=x_1+x_2+x_4 \qquad (5)$$

$$y=\begin{bmatrix}1&1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} \qquad (6)$$

<u>Przykłady przekształcania transmitancji na zmienne stanu</u>

Metoda bezpośrednia

<u>Przykład 1</u>

$$G(s)=\frac{s}{s+1}$$

$$\frac{s}{s+1}\cdot\frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s}}=\frac{1}{1+\frac{1}{s}}=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\frac{U(s)}{1+\frac{1}{s}}=\frac{Y(s)}{1}=E(s)$$

$$Y(s)=E(s)$$

$$\frac{U(s)}{1+\frac{1}{s}}=E(s)$$

$$U(s)=E(s)\cdot\left[1+\frac{1}{s}\right]=E(s)+\frac{1}{s}\cdot E(s)$$

$$E(s)=U(s)-\frac{1}{s}\cdot E(s)$$

Równanie zmiennych stanu

$$\dot{x}=-x_1+u$$

$$\left[\dot{x}\right]=[-1]\cdot[x_1]+[1]\cdot[u]$$

$$y=\dot{x}=-x_1+u$$

$$[y]=[-1]\cdot[x_1]+[1]\cdot[u]$$

Mnożąc licznik i mianownik transmitancji przez s^{-n} otrzymamy

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_{n-1}s^{-1}+\ldots+b_1s^{1-n}+b_0s^{-n}}{1+a_{n-1}s^{-1}+\ldots+a_1s^{1-n}+a_0s^{-n}}$$ prz

y czym Y(s) i U(s) są odpowiednio transformatą Laplace'a odpowiedzi i wymuszenia.
W zależności mamy:

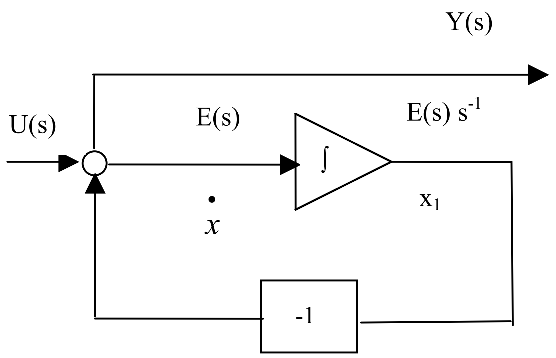
$$Y(s)=(b_{n-1}s^{-1}+\ldots+b_1s^{1-n}+b_0s^{-n})E(s)$$

przy czym

$$E(s)=\frac{U(s)}{1+a_{n-1}s^{-1}+\ldots+a_1s^{1-n}+a_0s^{-n}}$$

Zależność możemy również zapisać w postaci:

$$E(s)=U(s)-(a_{n-1}s^{-1}+\ldots+a_1s^{1-n}+a_0s^{-n})E(s)$$



Przykład 2

$$G(s) = \frac{2s+3}{s^2+s+1} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\frac{2s+3}{s^2+s+1} \cdot \frac{s^{-2}}{s^{-2}} = \frac{2s^{-1}+3s^{-2}}{1+s^{-1}+s^{-2}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\frac{U(s)}{1+s^{-1}+s^{-2}} = \frac{Y(s)}{2s^{-1}+3s^{-2}} = E(s)$$

$$\frac{Y(s)}{2s^{-1}+3s^{-2}} = E(s)$$

$$Y(s) = E(s)\cdot\left[2s^{-1}+3s^{-2}\right] = 2\cdot E(s)\cdot s^{-1} + 3E\cdot(s)\cdot s^{-2}$$

$$\frac{U(s)}{1+s^{-1}+s^{-2}} = E(s) \Rightarrow U(s) = E(s)\cdot\left[1+s^{-1}+s^{-2}\right]$$

$$E(s) = U(s) - E(s)\cdot s^{-1} - E(s)\cdot s^{-2}$$

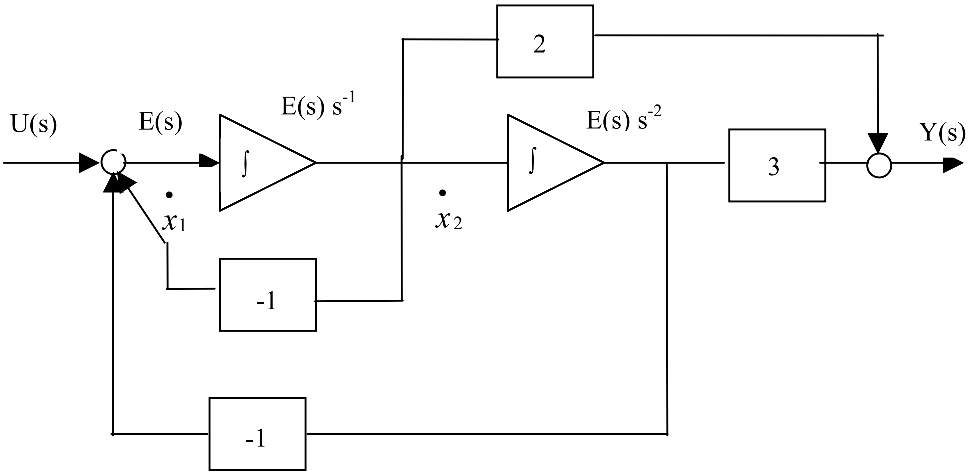
Równanie zmiennych stanu –
W następnych przykładach nie
będzie one wyprowadzone.

$$\dot{x} = x_2 \qquad y = 2x_2 + 3x_1 =$$

$$\dot{x} = -x_1 - x_2 + u \qquad = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot [u]$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D} \cdot [u]$$



Przykład 3

$$G(s)=\frac{4s^2+5s+1}{(s+3)(s+4)(s+5)}=\frac{4s^2+5s+1}{(s^2+3s+4s+12)(s+5)}=$$

$$=\frac{4s^2+5s+1}{s^3+7s^2+12s+5s^2+35s+60}=\frac{4s^2+5s+1}{s^3+12s^2+47+60}=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

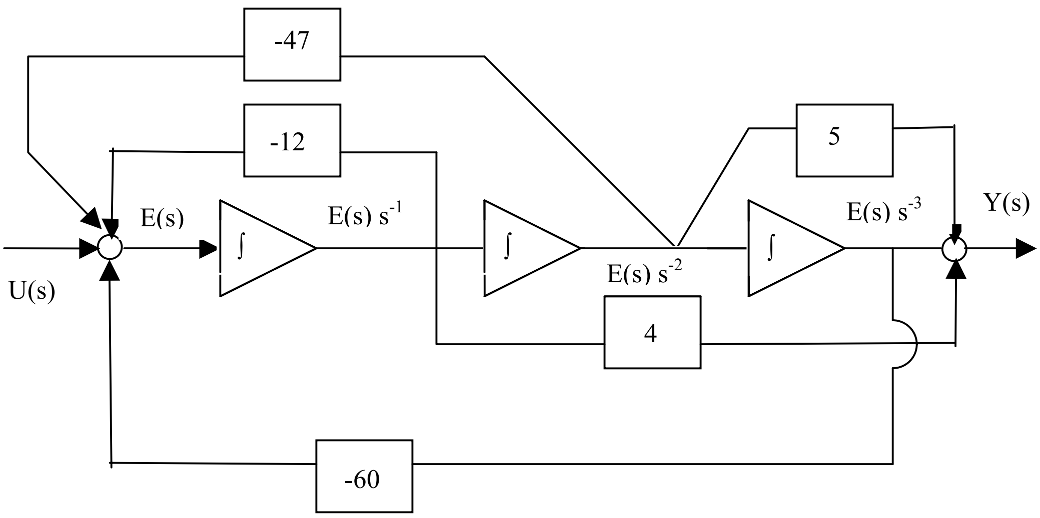
$$\frac{4s+5s+1}{s^3+12s^2+47s+60}\cdot\frac{s^{-3}}{s^{-3}}=\frac{4s^{-1}+5s^{-2}+s^{-3}}{1+12s^{-1}+47s^{-2}+60s^{-3}}=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\frac{U(s)}{1+12s^{-1}+47s^{-2}+60s^{-3}}=\frac{Y(s)}{4s^{-1}+5s^{-2}+s^{-3}}=E(s)$$

$$Y(s)=E(s)\cdot\left[4s^{-1}+5s^{-2}+s^{-3}\right]$$

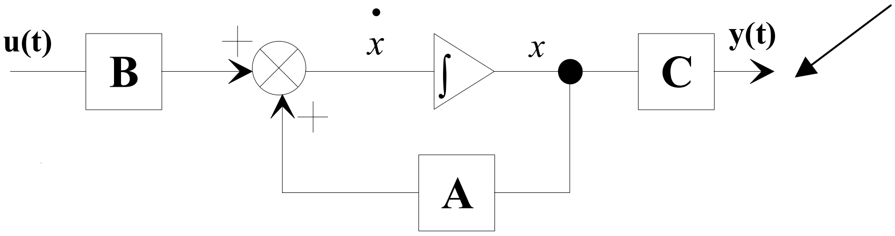
$$U(s)=E(s)\cdot\left[1+12s^{-1}+47s^{-2}+60s^{-3}\right]$$

$$E(s)=U(s)-12\cdot E(s)\cdot s^{-1}-47\cdot E(s)\cdot s^{-2}-60\cdot E(s)\cdot s^{-3}$$



Przykład 4

Problem:
Układ jednowymiarowy o schemacie ogólnym przedstawionym na rysunku 1., o transmitancji G(s) opisać równaniami stanu i równaniami wyjścia. Narysować schemat blokowy wynikający z obliczeń zmiennych stanów.



Schemat układu jednowymiarowego o wejściach r=1 , wyjściach m=1 i o n=3 równaniach stanu

Rys.1Schemat ogólny układu

Rozwiązanie:

Transmitancja G(s) to stosunek transmitancji sygnału wyjściowego Y(s) do transmitancji sygnału sterującego U(s).

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3s^2+1s+2}{2s^3+s^2+2s+1} \qquad (1)$$

Mnożymy licznik i mianownik transmitancji G(s) przez odwrotność najwyższej potęgi w mianowniku

$$G(s)=\frac{3s^2+1s+2}{2s^3+s^2+2s+1} \Bigg/ \frac{\frac{1}{s^3}}{\frac{1}{s^3}} \qquad (2)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3\frac{1}{s}+1\frac{1}{s^2}+2\frac{1}{s^3}}{2+\frac{1}{s}+2\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}} \qquad (3)$$

Wprowadzamy zmienną E(s) i przekształcając równanie (3) otrzymujemy poniższą zależność

$$E(s)=\frac{U(s)}{2+\frac{1}{s}+2\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}}=\frac{Y(s)}{3\frac{1}{s}+1\frac{1}{s^2}+2\frac{1}{s^3}} \qquad (4)$$

Równania (5) i (6) otrzymujemy przez wymnożenie stronami równania (4)

$$U(s)=2E(s)+E(s)\frac{1}{s}+2E(s)\frac{1}{s^2}+E(s)\frac{1}{s^3} \qquad (5)$$

$$Y(s)=3E(s)\frac{1}{s}+E(s)\frac{1}{s^2}+2E(s)\frac{1}{s^3} \qquad (6)$$

Przekształcając równanie (5) otrzymujemy:

$$2E(s)=U(s)-E(s)\frac{1}{s}-2E(s)\frac{1}{s^2}-E(s)\frac{1}{s^3} \quad /:2 \qquad (7)$$

$$E(s)=U(s)-\frac{1}{2}E(s)\frac{1}{s}-E(s)\frac{1}{s^2}-\frac{1}{2}E(s)\frac{1}{s^3} \qquad (8)$$

Na podstawie równania (8) wyznaczamy równania stanu w postaci wektorowej:

$$\dot{x}_1 = 1x_2 \tag{9}$$

$$\dot{x}_2 = 1x_3 \tag{10}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{2}U(s) - \frac{1}{2}x_3 - x_2 - \frac{1}{2}x_1$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{2}x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}U(s) \tag{11}$$

W równaniach (9),(10),(11) występują poniższe podstawienia:

$$E(s) = \dot{x}_3$$

$$E(s)\tfrac{1}{s} = \dot{x}_2 = x_3$$

$$E(s)\tfrac{1}{s}\tfrac{1}{s} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$E(s)\tfrac{1}{s}\tfrac{1}{s}\tfrac{1}{s} = x_1$$

Równanie stanu w postaci wektorowo-macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot U(s) \tag{12}$$

Macierz stanu o wymiarach n x n (13)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Macierz sterowania o wymiarach n x r (14)

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Równanie stanu w uproszczonej postaci:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{15}$$

Równanie wyjścia powstało po przekształceniu równania (6):

$$y = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \tag{16}$$

Równanie wyjścia (16) powstało po podstawieniu do równania (6) następujących wyrażeń:

$$E(s)\tfrac{1}{s} = x_3$$

$$E(s)\tfrac{1}{s}\tfrac{1}{s} = x_2$$

$$E(s)\tfrac{1}{s}\tfrac{1}{s}\tfrac{1}{s} = x_1$$

Równanie wyjścia w postaci macierzowej:

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0 \cdot U(s) \tag{17}$$

Macierz wyjścia o wymiarach m x n

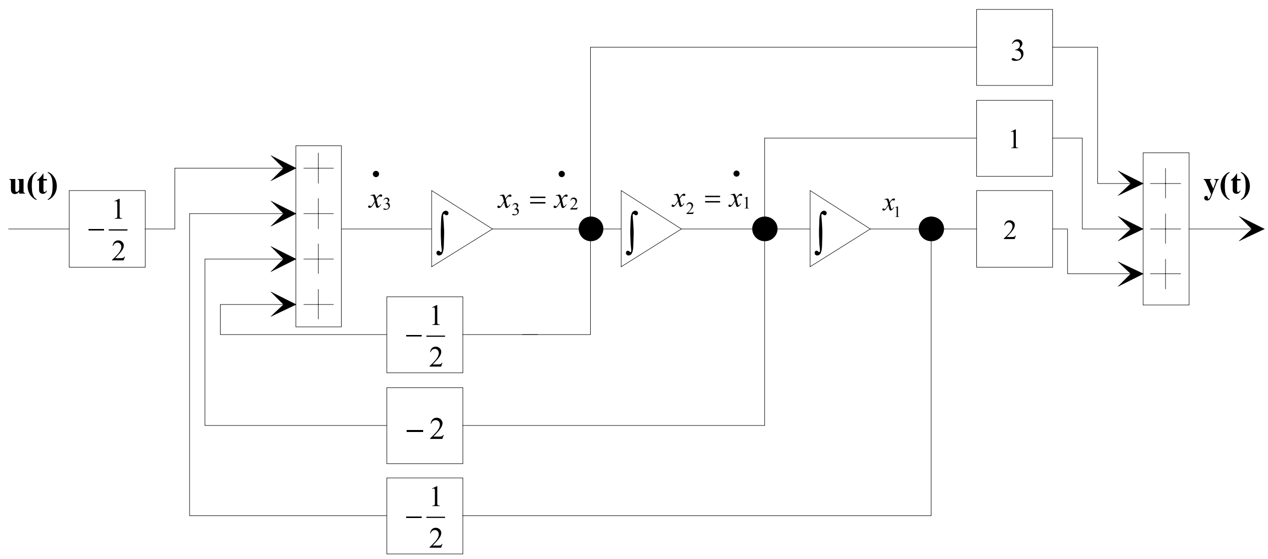
$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Stała macierz transformacji o wymiarach m x r

$$D = 0 \tag{19}$$

Równanie wyjścia w uproszczonej postaci:

$$y(t)=Cx(t) \tag{20}$$



Rys.2 Schemat blokowy układu regulacji spełniający równania stanu i wyjścia dla transmitancji G(s).