TRANSFORMATA LAPLACE'A
ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Zadanie 1 (Rachunek Operatorowy)

Problem:
Rozwiązać metodą operatorową równanie różniczkowe

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$x(t) = 1(t)$$

przy warunkach początkowych

a. y(0) = 0
b. y(0) = 0,5
c. y(0) = 1
d. y(0) = 2.

Rozwiązanie:
Stosując przekształcenie Laplace'a z uwzględnieniem warunków początkowych otrzymuje się:

$$T\,[\,s\,y(s) - y(0)\,] + y(s) = \frac{1}{s}$$

$$(Ts + 1)\,y(s) = \frac{1}{s} + T \bullet y(0)$$

$$y(s) = \frac{1}{s(Ts+1)} + T\frac{1}{Ts+1}\,y(0)$$

$$y(t) = (1 - e^{-\frac{t}{T}}) + y(0) - e^{-\frac{t}{T}}.$$

Dla

y(0)= 0	yt) = 1 - $e^{-\frac{t}{T}}$
y(0) = 0,5	y(t) = 1 – 0,5 - $e^{-\frac{t}{T}}$
y(0) = 1	y(t) = 1
y(0) = 2	y(t) = 1 + $e^{-\frac{t}{T}}$

Zadanie 2 (Rachunek Operatorowy)

Problem:
Za pomocą rozkładu na ułamki proste znaleźć funkcje czasowe odpowiadające następującej funkcji operatorowej:

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2(2s+1)}$$

Rozwiązanie:
Rozkładamy funkcję operatorową na ułamki proste

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2(2s+1)} = A\frac{1}{s^2} + B\frac{1}{s} + C\frac{1}{(s+1)^2} + D\frac{1}{s+1} + E\frac{1}{s+\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Współczynniki A,B,C,D,E obliczamy metodą podaną przez Heavside'a. Mnożymy równanie (1) przez s^2

$$\frac{1}{(s+1)^2(2s+1)} = A + sB + s^2\left[C\frac{1}{(s+1)^2} + D\frac{1}{s+1} + E\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right] \quad (2)$$

w równaniu (2) podstawiamy s = 0, otrzymamy

$$A = 1$$

Różniczkujemy równanie (2) względem s.

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s+1)^2(2s+1)}\right) = \frac{-(6s^2+10s+4)}{\left[(s+1)^2(2s+1)\right]^2} = B + 2s[...] + s^2\frac{d}{ds}[...]$$

W otrzymanym równaniu podstawimy s = 0, otrzymamy

$$B = -4$$

Mnożymy równanie (1) przez $(s+1)^2$

$$\frac{1}{s^2(2s+1)} = (s+1)^2\left[A\frac{1}{s^2} + B\frac{1}{s} + E\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right] + C + (s+1)D \quad (3)$$

Wstawiamy s = -1 otrzymujemy

$$C = -1$$

Różniczkujemy równanie (3) względem s i podstawiamy s = -1, otrzymamy

$$D = -4$$

Mnożymy (1) przez (s + $\frac{1}{2}$) i podstawiamy s = - $\frac{1}{2}$ otrzymamy

$$E = 8.$$

Rozkład funkcji F(s) na ułamki proste wyraża się wzorem

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - 4\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - 4\frac{1}{s+1} + 8\frac{1}{s+\frac{1}{2}}$$

<u>Zadanie 3 (rachunek operatorowy)</u>

Problem:
Metodą operatorową rozwiązać równanie różniczkowe

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4y = e^x$$

przyjmując zerowe wartości warunków początkowych.

Rozwiązanie:

Tok postępowania przy zastosowaniu metody operatorowej jest następujący:
1° Dokonujemy obustronnej transformacji równania różniczkowego

$$L\left\{\frac{d^2 y}{dx^2} - 4y\right\} = L\left\{e^x\right\}$$

$$[Y(s)s^2 - y^{'}(0)s - y(0)] - 4Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

Wykorzystujemy twierdzenia:

$$L\{kf(t)\} = cL\{f(t)\}$$

$$L\{\pm f(t) \pm g(t)\} = L\{f(t)\} \pm L\{g(t)\}$$

$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s$$

$$-...... - s \left.\frac{d^{n-2f} f(t)}{dt^{n-2}}\right|_{t=0} - \left.\frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$$

Transformaty Laplace'a – dodatek A

2° Podstawiamy warunki początkowe:

$$y^{'}(0) = 0 \qquad \cap \qquad y(0) = 0$$

$$Y(s)s^2 - 4Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

3° Wyznaczamy operatorową postać rozwiązania:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2-4)}$$

4° Wyznaczamy transformatę odwrotną:

$$L^{-1}\{Y(s)\} = y(x)$$

Wykorzystujemy metodę Heviside'a:

1° $L_1(s) = 1$ $M_m(s) = (s^2 - 4)(s - 1)$

Y(s)-jest funkcją wymierną.

2° $l = 0$ $m = 3 \rightarrow$ $l < m$

3° L_1(s) nie ma miejsc zerowych

$$M_m(s) = (s^2 - 4)(s - 1) = 0$$

$$(s - 2)(s + 2)(s - 1) = 0 \Rightarrow s_1 = 2 \qquad s_2 = -2 \qquad s_3 = 1$$

Miejsca zerowe licznika i mianownika są różne od zera.

4° Na podstawie 3° można stwierdzić, że wielomian mianownika nie ma miejsc zerowych wielokrotnych.
Wyznaczamy pochodną mianownika

$$M'(s) = \frac{dM(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left[(s^2 - 4)(s - 1)\right] = 2s(s - 1) + (s^2 - 4)$$

Wartość wielomianu licznika L_1(s) jest stała i równa 1.

$$M'(s_1) = 2 \cdot 2 \cdot (2 - 1) = 4$$

$$M'(s_2) = 2(-2)(-2 - 1) = 12$$

$$M'(s_3) = (1 - 4) = -3$$

Wyznaczamy transformatę odwrotną:

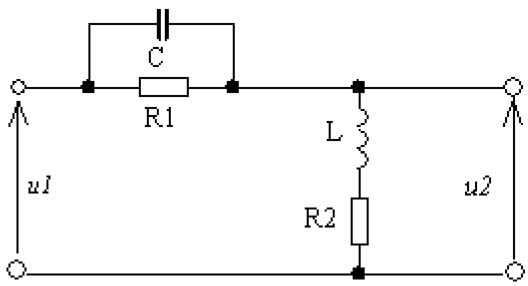
$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 - 4)(s - 1)}\right\} = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{12}e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{x} \longleftarrow \boxed{L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{L_l(s_m)}{M'(s_m)} e^{s_m t}}$$

Zadanie 4 (rachunek operatorowy)

Problem:

Wyznaczyć równania i znaleźć transmitancję operatorową układu podanego na rys.2.1 jeśli wielkość wejściowa – U_1, wielkość wyjściowa – U_2.

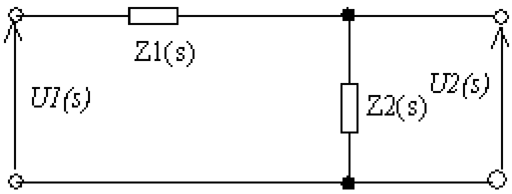
Parametry podane na rysunku są różne od zera i skończone.



Rys.2.1. Czwórnik RC

Rozwiązanie:

Układ z rys.2.1 można przedstawić w postaci ogólnej jak na rys.2.2, gdzie Z_1 , Z_2 - impedancje.



Rys.2.2 Schemat ogólny czwórnika biernego

Transmitancje tego czwórnika łatwo określić z jego równań operatorowych

$$\left.\begin{aligned} U_1(s) &= [Z_1(s)+Z_2(s)]I(s), \\ U_2(s) &= Z_2(s)I(s), \end{aligned}\right\}$$

gdzie $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ – impedancje operatorowe, stąd

$$U_1(s) = [Z_1(s)+Z_2(s)]\frac{U_2(s)}{Z_2(s)}.$$

Zastępcza impedancja operatorowa Z_1 powstała z równolegle połączonych C i R_1.Przy połączeniu równoległym impedancja zastępcza jest iloczynem składników impedancji podzielonym przez sumę składników impedancji.
Zastępcza impedancja operatorowa Z_2 powstała z szeregowo połączonych L i R_2.Przy połączeniu szeregowym impedancja zastępcza jest sumą składników impedancji.

A zatem

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}$$

W rozpatrywanym przypadku

$$\left.\begin{aligned} Z_1(s) &= \frac{R_1}{1+sCR_1}, \\ Z_2(s) &= R_2 + sL. \end{aligned}\right\}$$

W metodzie operatorowej:
$R \Rightarrow R$
$C \Rightarrow 1/sC$
$L \Rightarrow sL$

Stąd

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_2+sL}{\dfrac{R_1}{1+sCR_1}+R_2+sL} = \frac{(R_2+sL)(1+sCR_1)}{R_1+R_2(1+sCR_1)+sL(1+sCR_1)}.$$

Wyrażenie to można przekształcić do postaci

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{(R_2+sL)(1+sT_1)}{R_1+R_2(1+sT_1)+sL(1+sT_1)},$$

gdzie $T_1=R_1C$.

Zadanie 5 Rachunek operatorowy (Transformata Laplace'a)

Problem:
Znaleźć transformatę Laplace'a równania:

Przyjmujemy że
$y \equiv y(t)$

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 5e \qquad (1)$$

przy warunku początkowym $y(0) = 4$

Poddajemy obie strony równania (1) przekształcenia Laplace'a

$L\{y'\} + 3L\{y\} = 5L\{e^{2t}\}$ (2)

Funkcje e^{2t} przekształcamy za pomocą transformat Laplace'a
$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$L\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2} \qquad (3)$$

Wykorzystując tablice transformat i podstawiając do wzoru (2) otrzymujemy wzór (3)

$$sL\{y\} - f(0^+) + 3L\{y\} = \frac{5}{s-2} \qquad (4)$$

Korzystamy z własności transformat pochodnej funkcji Laplace'a

$L\{f^{'}(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0^+)$

Otrzymaliśmy w ten sposób algebraiczne równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą $L\{y\}$. Podstawiając $f(0^+) = 4$ oraz wyznaczamy

$$sL\{y\} - 4 + 3L\{y\} = \frac{5}{s-2} \qquad (5)$$

$$sL\{y\} + 3L\{y\} = \left(\frac{5}{s-2} - 4\right)\Bigg| \frac{1}{(s+3)} \qquad (6)$$

$$L\{y\} = \frac{4s-3}{(s-2)(s+3)} \qquad (7)$$

Rozkładając prawą stronę na sumę dwóch ułamków prostych

$$\frac{4s-3}{(s-2)(s+3)} = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s+3)} \qquad (8)$$

Aby ułatwić rozwiązywani równanie (7)rozkładamy na sumę ułamków prostych, wymnażamy, porządkujemy doprowadzając do układu równań, po rozwiązaniu, którego mamy współczynniki A,B, które podstawiamy powrotem do równania (8) i otrzymujemy w ten sposób o wiele prostszą postać równania (7)

$$4s - 3 = A(s+3) + B(s-2) \qquad (9)$$

a podstawiając

$$4s - 3 = As + 3A + sB - 2B \qquad (10)$$

$$4s - 3 = s(A+B) + 3A - 2B \qquad (11)$$

$$\begin{cases} 4s = s(A+B) \\ -3 = 3A - 2B \end{cases} \qquad (12)$$

$$\begin{cases} A = 4 - B \\ -3 = -(4-B) - 2B \Rightarrow -3 = -4 + B - 2B \end{cases}$$

$$B = -1$$
$$A = 3 \qquad (13)$$

A więc

$$L\{y\} = \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s+3} \qquad (14)$$

na podstawie wzoru (2) otrzymujemy równanie

$$y = 3e^{2t} + e^{3t} \qquad (15)$$

Wykorzystując tablice transformat Laplace'a przechodzimy z postać transformaty funkcji do jej postaci czasowej

Zadanie 6 Rachunek operatorowy (Transformata Laplace'a)

Problem:
Znaleźć transformatę Laplace'a funkcji: z funkcji

Korzystamy z definicji transforanaty Laplace'a
$L\{f(t)\} = \int^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

$$L\{\sin(\omega t)\} = \int_0^{\infty} \sin(\omega t)e^{-st}dt \qquad (2)$$

Do obliczenia tej całki korzystamy z podstawienia

$$\begin{vmatrix} u = \sin(\omega t); dv = e^{-st} \\ du = \omega\cos(\omega t); v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{vmatrix}$$

$$L\{\sin(\omega t)\} = -\tfrac{1}{s}\sin(\omega t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} + \frac{\omega}{s}\int_0^{\infty}\cos(\omega t)e^{-st}dt \qquad (3)$$

$$L\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s}(-\frac{1}{s}\cos(\omega t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} - \frac{\omega}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}dt \qquad (4)$$

Po przeniesieniu stronami otrzymujemy

$$(1+\frac{\omega^2}{s^2})\int_0^{\infty}\sin(\omega t)e^{-st}dt = \frac{\omega}{s^2} \qquad (5)$$

Do obliczenia tej całki korzystamy z podstawienia

$$\begin{vmatrix} u = \cos(\omega t); dv = e^{-st} \\ du = -\omega\sin(\omega t); v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{vmatrix}$$

po podzieleniu $(1+\frac{\omega^2}{s^2})$ (5) otrzymujemy

$$\int_0^{\infty}\sin(\omega t)e^{-st}dt = \frac{\omega}{s^2(1+\frac{\omega^2}{s^2})} \qquad (6)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2 + s^2 \frac{\omega^2}{s^2}} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (8)$$

Wzór (8) jest taki sam w tablicy transformat Laplace'a .

DODATEK

Definicja transformaty Laplace'a:

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} = F(s)$$

Transformata pochodnej funkcji we wzorze ogólnym:

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum s^k \frac{d^{n-k-1} f(0)}{dt^{n-k-1}}$$

Właściwości transformaty Laplace'a:

1. Twierdzenie o liniowości:

$$L[a_1 f_1(t) \pm a_2 f_2(t)] = a_1 L[f_1(t)] \pm a_2 L[f_2(t)]$$

2. Twierdzenie o podobieństwie:

$$L[f(t)] = F(s) \Rightarrow L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

3. Transformata iloczynu:

$$L[af(t)] = aL[f(t)]$$

4. Transformata sumy i różnicy dwóch funkcji:

$$L[\pm f_1(t) \pm f_2(t)] = \pm L[f_1(t)] \pm L[f_2(t)]$$

Transformaty Laplace'a F(s) i odpowiadające im funkcje f(t)

F(s)	F(t)
$\frac{1}{s}$	$1(t)$
$\frac{c}{s}$	c
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-10)!}; n=1,2,3,\ldots$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}; n=1,2,3,\ldots$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right); a \neq b$
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\sin at$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\sinh at$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$