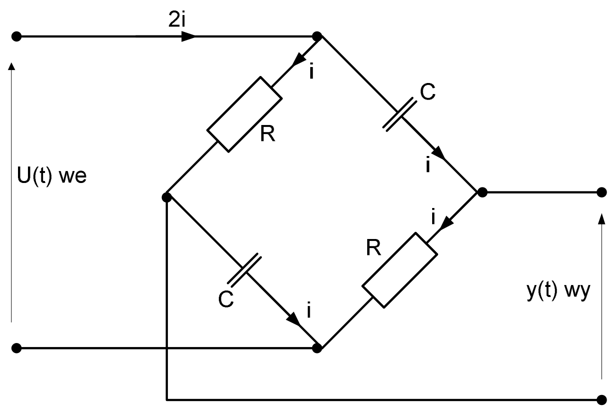
Modele matematyczne układów elementarnych

1. Wyznaczyć transmitancję operatorową nieobciążonego czwórnika wg poniższego schematu.



$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=?$$

Rozwiązanie:

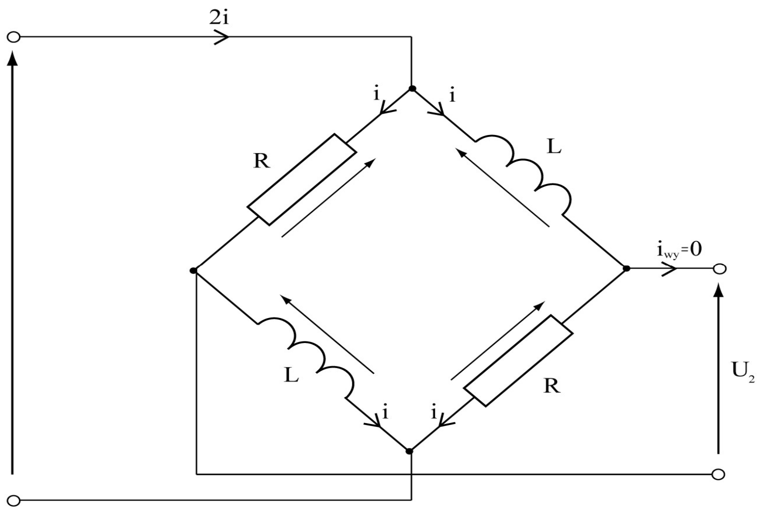
$$U(s)=I(s)\left(R+\frac{1}{Cs}\right)$$

$$Y(s)=I(s)\left(R-\frac{1}{Cs}\right)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{R-\frac{1}{Cs}}{R+\frac{1}{Cs}}=\frac{RCs-1}{RCs+1}$$

$$G(s)=\frac{Ts-1}{Ts+1}\quad ;\qquad T=RC$$

2. Wyznaczyć transmitancję operatorową nieobciążonego czwórnika wg poniższego schematu.



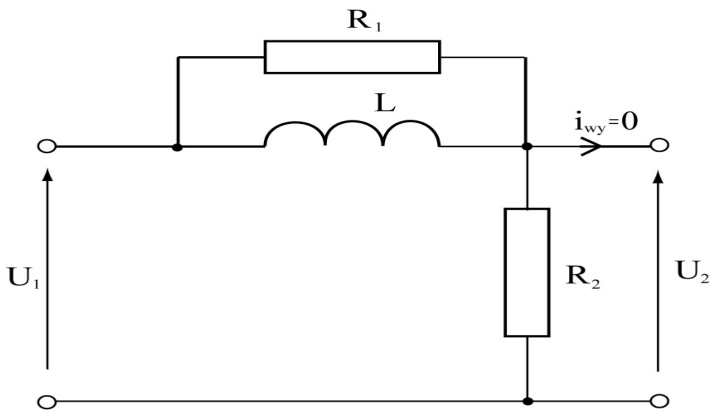
$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=?$$

$$\left.\begin{aligned}U_1(s)&=IR+LsI\\U_2(s)&=IR-LsI\end{aligned}\right\}$$

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{(R-Ls)I}{(R+Ls)I}$$

$$G(s)=\frac{1-\frac{L}{R}s}{1+\frac{L}{R}s}=\frac{1-Ts}{1+Ts}\text{, gdzie}\qquad T=\frac{L}{R}$$

3. Wyznaczyć transmitancję operatorową nieobciążonego czwórnika wg poniższego schematu.



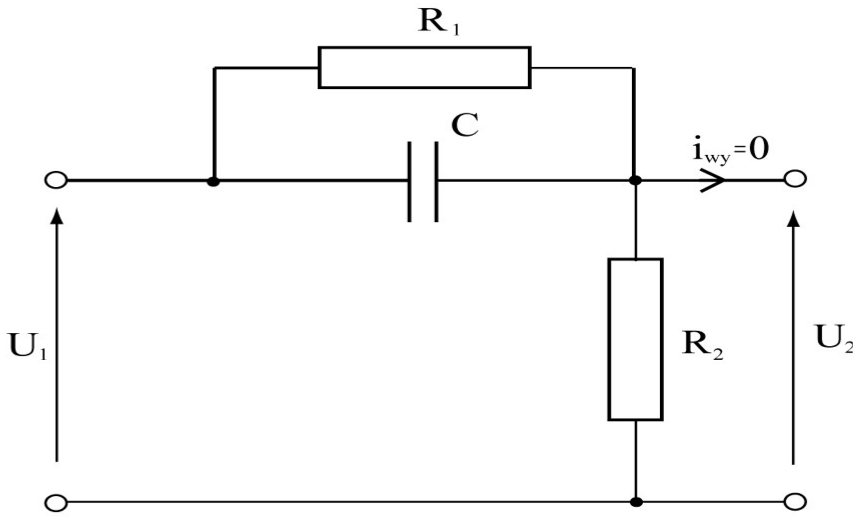
$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=?$$

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{R_2}{\frac{R_1Ls}{R_1+Ls}+R_2}=\frac{R_2(R_1+Ls)}{R_1Ls+R_1R_2+R_2Ls}$$

$$G(s)=\frac{R_1+Ls}{\frac{R_1}{R_2}Ls+R_1+Ls}=\frac{\frac{L}{R_1}s+1}{Ls\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)+1}$$

$$G(s)=\frac{T_1s+1}{(T_1+T_2)s+1},\qquad gdzie\quad T_1=\frac{L}{R_1}\quad ;T_2=\frac{L}{R_2}$$

4. Wyznaczyć transmitancję operatorową nieobciążonego czwórnika wg poniższego schematu.



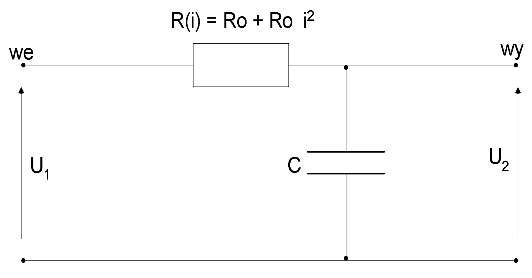
$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=?$$

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{R_2}{\dfrac{\dfrac{R_1}{Cs}}{R_1+\dfrac{1}{Cs}}+R_2}=\frac{R_2}{\dfrac{R_1}{R_1Cs+1}+R_2}=\frac{R_2(R_1Cs+1)}{R_1+R_2(R_1Cs+1)}$$

$$G(s)=\frac{R_1Cs+1}{R_1Cs+1+\dfrac{R_1}{R_2}}=\frac{R_1Cs+1}{R_1Cs+\dfrac{R_1+R_2}{R_2}}$$

$$G(s)=\frac{K(Ts+1)}{KTs+1},\qquad \text{gdzie}\quad T=R_1C;\quad K=\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

5. Dany jest nieobciążony nieliniowy czwórnik RC, w którym opór zależy od prądu wg wzoru podanego na poniższym schemacie.



a) Napisać równanie wiążące $U_2(t)$ z $U_1(t)$
b) Zlinearyzować to równanie wokół punktu $i=i_0=0$
c) Wyznaczyć transmitancję od modelu zlinearyzowanego od $U_1(t)$ do $U_2(t)$
d) Przeskalować równanie zlinearyzowane do współczynników równych 1

Rozwiązanie

a) $U_1(t) = i(t)R(i) + U_2(t)$ (1)

$$\left.\begin{aligned} U_1(t) &= i(t)\cdot R_0\left(1+i^2(t)\right)+U_2(t) \\ i(t) &= C\frac{dU_2(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}$$

$$U_2(t)+R_0C\frac{dU_2(t)}{dt}+R_0C^3\left(\frac{dU_2(t)}{dt}\right)^3=U_1(t)$$

b) $R(i)=R_0+R_0i^2$

$$R(i_0+\Delta i)=R(i_0)+\left.\frac{dR}{di}\right|_{i_0}\Delta i+RN\approx R_0+R_0i_0^2+2R_0i_0\Big|_{i_0=0}=R_0$$

Podstawiając zlinearyzowaną rezystancję do (1) otrzymuje się

$$U_2(t)+R_0i(t)=U_1(t)$$

Teraz podstawiając za prąd wg (3) otrzymuje się równanie zlinearyzowane

$$U_2(t)+R_0C\frac{dU_2(t)}{dt}=U_1(t)$$

c) Stosując transformację Laplace'a dla zerowych warunków początkowych otrzymuje się

$$U_2(s)+R_0CsU_2(s)=U_1(s)$$

$$G(s)=\frac{U_2}{U_1}=\frac{1}{1+R_0Cs}=\frac{1}{1+T_0s}\ ,\quad \text{gdzie}\quad T_0=R_0C$$

d) Wprowadźmy zmienne bezwymiarowe

$$y_1=\frac{U_1}{U_{01}},\qquad y_2=\frac{U_2}{U_{02}},\qquad \tau=\omega_0t\ ,$$

skąd dla pochodnej mamy $\dfrac{dU_2}{dt}=\omega_0U_{02}\dfrac{dy_2}{d\tau}$.

Równanie (4) przyjmuje postać

$$U_{01}y_1(\tau)=R_0C\omega_0U_{02}\frac{dy_2}{d\tau}+U_{02}y_2$$

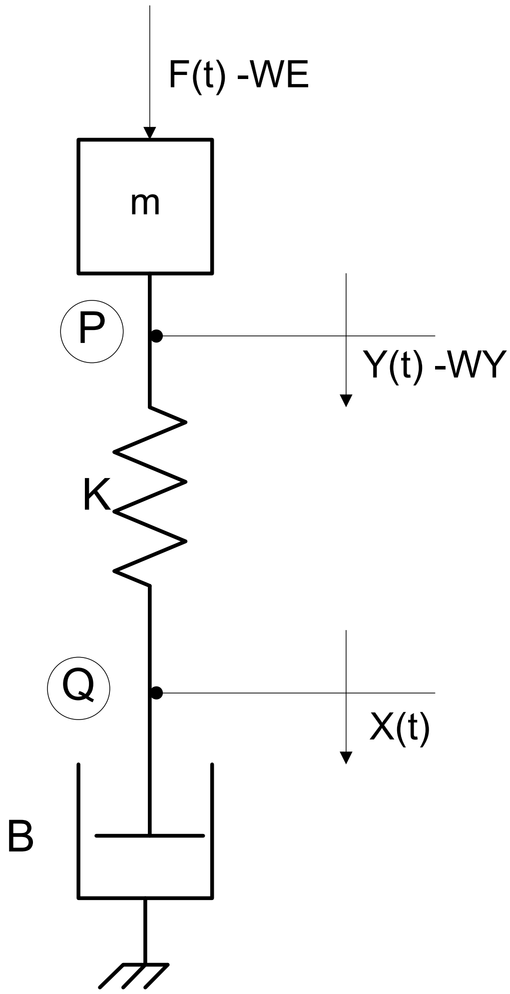
Przyjmijmy $U_{01}=U_{02}=1\text{V}$,

wtedy musi być $R_0C\omega_0=1$,

skąd $\omega_0=\dfrac{1}{R_0C}=\dfrac{1}{T_0}$

Dla prądu $i(t)$ zmienna bezwymiarowa $j=\dfrac{i}{i_b}$,
gdzie i otrzymamy z zależności $i_b\,j=C\omega_0U_{02}\dfrac{dy^2}{d\tau}$.
Mamy więc $i_b=C\omega_0U_{02}=C\dfrac{1}{R_0C}1\text{V}=\dfrac{1\text{V}}{R_0}$

6. Wyznaczyć transmitancję operatorową układu mechanicznego wg poniższego schematu.



$$\left.\begin{aligned} P &: f(t) - m\ddot{y} - k\big(y(t) - x(t)\big) = 0 \\ Q &: k(y - x) - B\dot{x} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &F(s) = ms^2Y(s) + kY(s) - kX(s) \\ &kY(s) - kX(s) = sBX(s) \end{aligned}\right\}$$

$$X(s)(Bs + k) = kY(s)$$

$$X = \frac{k}{Bs + k}Y = \frac{1}{1 + \frac{B}{k}s}Y$$

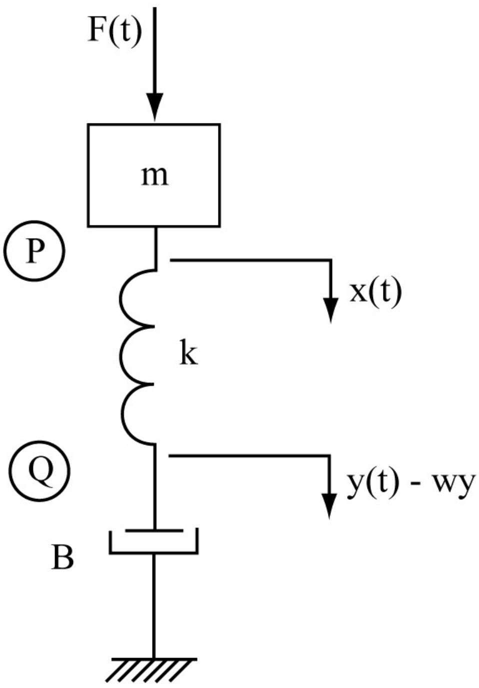
$$Y\left(ms^2 + k - \frac{k^2}{Bs + k}\right) = F$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{Bs + k}{mBs^3 + mks^2 + kBs + k^2 - k^2}$$

$$T_1 = \frac{B}{k}; \quad T_2 = \frac{m}{B}; \quad k_1 = \frac{1}{B}$$

$$G(s) = \frac{\frac{B}{k}s + 1}{\left(\frac{mB}{k}s^2 + ms + B\right)s} = \frac{1}{B}\,\frac{\frac{B}{k}s + 1}{\left(\frac{m}{k}s^2 + \frac{m}{B}s + 1\right)s} = k_1\frac{T_1 s + 1}{T_1T_2s^2 + T_2s + 1}$$

7. Wyznaczyć transmitancję operatorową układu mechanicznego wg poniższego schematu.



$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = ?$$

$$\left.\begin{aligned} P:&\quad F(s) - ms^2 X(s) - K(X - Y) = 0 \\ Q:&\quad K(X - Y) - BsY = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$KX = BsY + KY$$

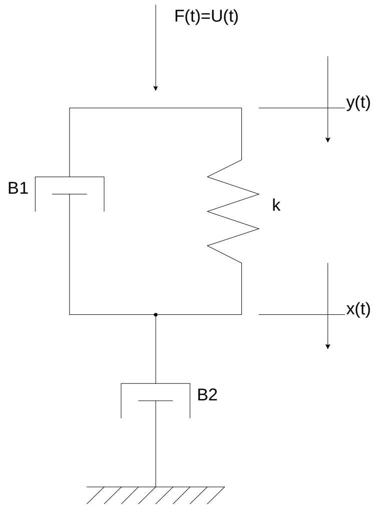
$$X = \frac{Bs + K}{K} Y = \left(\frac{B}{K} s + 1\right) Y$$

$$ms^2 \left(\frac{B}{K} s + 1\right) Y + K\left(\frac{B}{K} s + 1\right) Y - KY = F(s)$$

$$\left(\frac{Bms^3}{K} + ms^2 + Bs\right) Y = F(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{\left(\frac{Bm}{K} s^2 + ms + B\right) s} = \frac{\frac{1}{B}}{\left(\frac{m}{K} s^2 + \frac{m}{B} s + 1\right) s}$$

8. Wyznaczyć transmitancję operatorową układu mechanicznego wg poniższego schematu.



$$G(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}$$

Rozwiązanie:

$$\left.\begin{aligned}&F(s)=B_1s(Y-X)+k_1(Y-X)\\&-B_2sX=B_1s(X-Y)+k(X-Y)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&F=(B_1s+k)Y-(B_1s+k)X\\&(B_1s+k+B_2s)X=Y(B_1s+k)\end{aligned}\right\}$$

$$X=\frac{Y(B_1s+k)}{(B_1+B_2)s+k}=Y\frac{T_1s+1}{T_2s+1}\quad,\qquad \text{gdzie}\qquad T_1=\frac{B_1}{k}\ ,\qquad T_2=\frac{B_1+B_2}{k}$$

$$F=(B_1s+k)Y-(B_1s+k)\frac{T_1s+1}{T_2s+1}Y$$

$$\frac{1}{G}=\frac{F}{Y}=(B_1s+k)\left[1-\frac{T_1s+1}{T_2s+1}\right]=k(T_1s+1)\frac{T_2s+1-T_1s-1}{(T_2s+1)}=\frac{1}{k_1}\frac{s(T_1s+1)}{T_2s+1}$$

$$G=k_1\frac{T_2s+1}{s(T_1s+1)}$$

gdzie

$$\frac{1}{k_1}=k(T_2-T_1)=k\left(\frac{B_1+B_2-B_1}{k}\right)=B_2$$

$$k_1=\frac{1}{B_2}$$

9. Przeskalować zlinearyzowane równanie wahadła matematycznego, przyjmując za jednostkę czasu okres drgań.

Dane: zlinearyzowane równanie wahadła

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta(t)=0 \qquad \text{przy warunkach początkowych} \qquad \theta(0)=0\ ;\ \dot{\theta}(0)=\dot{\theta}_0$$

Rozwiązanie równania metodą operatorową:

$$s^2\theta - s\theta_0 - \dot{\theta}_0 + \frac{g}{l}\theta(s)=0$$

$$\theta\left(s^2-\frac{g}{l}\right)=s\theta_0+\dot{\theta}_0$$

$$\theta(s)=\frac{s\theta_0}{s^2+\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2}+\dot{\theta}_0\frac{\sqrt{\frac{g}{l}}}{s^2+\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\theta(t)=\theta_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+\dot{\theta}_0\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t \qquad ,$$

skąd pulsacja drgań $\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{g}{l}}$ i okres drgań $T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Przyjmując za jednostkę czasu okres drgań, zastępujemy czas t bezwymiarowym czasem $\tau=\frac{1}{T}t$.

Teraz $\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{1}{T^2}\frac{d^2\theta}{d\tau^2}=\frac{g}{4\pi^2 l}\frac{d^2\theta}{d\tau^2}$ i równanie przyjmuje postać

$$\frac{g}{4\pi^2 l}\frac{d^2\theta}{d\tau^2}+\frac{g}{l}\theta=0 \,\Big|\, :\frac{g}{l}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\frac{d^2\theta}{d\tau^2}+\theta=0$$

Rozwiązanie tego równania metodą operatorową

$$\frac{1}{4\pi^2}s^2\theta-s\theta_0-\dot{\theta}_0+\theta=0$$

$$\theta\left(\frac{1}{4\pi^2}s^2+1\right)=s\theta_0+\dot{\theta}_0$$

$$\theta(s)=\frac{4\pi^2 s\theta_0}{s^2+4\pi^2}+\frac{4\pi^2\dot{\theta}_0}{s^2+4\pi^2}$$

$$\theta(\tau)=4\pi^2\theta_0\cos 2\pi\tau+2\pi\dot{\theta}_0\sin 2\pi\tau$$

Zastosowanie bezwymiarowego czasu τ dało wynik uogólniony, ważny dla dowolnej długości wahadła przy dowolnym przyspieszeniu grawitacyjnym.