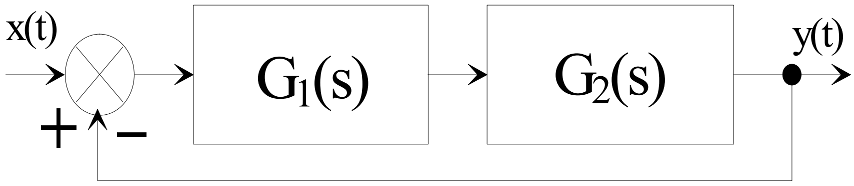
KRYTERIA ALGEBRAICZNE STABILNOŚCI UKŁADÓW LINIOWYCH

Zadanie 1

Problem:
Zbadać stabilność układu zamkniętego przedstawionego na schemacie według kryterium Hurwitza.



Rys 1. Schemat układu regulacji

Rozwiązanie:
Transmitancja układu otwartego ma postać :

$$G_o(s)=\frac{6}{s(4+s)(2s+1)} \qquad (1)$$

Transmitancja układu otwartego (1) powstała z wymnożenia transmitancji w bloczkach

Transmitancja układu zamkniętego ma postać:

$$G_z(s)=\frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} \qquad (2)$$

Transmitancja układu zamkniętego ma postać (2) ponieważ jest to układ ze sztywnym sprzężeniem zwrotnym

$$G_z(s)=\frac{6}{s(4+s)(2s+1)+6} \qquad (3)$$

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma postać:

$$s(4+s)(2s+1)+6=0$$
$$(4s+s^2)(2s+1)+6=0$$
$$8s^2+4s+2s^3+s^2+6=0$$
$$2s^3+9s^2+4s+6=0 \qquad (4)$$

Współczynniki wielomianu : $a_0=6$, $a_1=4$, $a_2=9$, $a_3=2$

Liczymy stabilność układu:
Sprawdzamy warunki Hurwitza:
1)warunek konieczny-wszystkie współczynniki wielomianu dodatnie. W równaniu (4) wszystkie współczynniki istnieją i są dodatnie , więc układ zamknięty może być stabilny , ale nie jest to pewne.
2)warunek wystarczający-wyznaczniki Hurwitza i jego podwyznaczniki mają wartości większe od zera.
Stopień wielomianu n=3

Zgodnie z tabelą wyznacznik Hurwitza ma postać:

$$\Delta_n=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = (9\cdot 4\cdot 6 + 0\cdot 2\cdot 9 + 0\cdot 0\cdot 6) - \qquad (6)$$

$$-(0\cdot 0\cdot 4 + 9\cdot 9\cdot 0 + 6\cdot 6\cdot 2) = 216 - 72 = 144 > 0$$

Podwyznacznik drugiego rzędu:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = 9\cdot 4 - 6\cdot 2 = 36\_12 = 24 > \qquad (7)$$

Wyznacznik Δ_2 powstał przez wydzielenie podwyznacznika z Δ_3

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

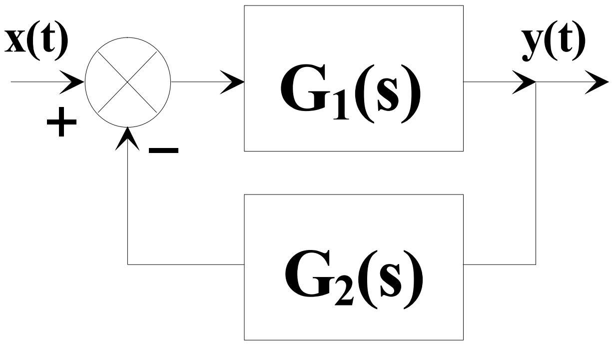
Podwyznacznik pierwszego rzędu:

$$\Delta_1 = a_2 = 9 > 0 \qquad (8)$$

Drugi warunek Hurwitza jest spełniony, a zatem układ zamknięty jest stabilny.

Zadanie 2

Problem:
Zbadać stabilność układu regulacji przedstawionego na schemacie stosując kryterium Hurwitza . Sprawdzić stabilność układu otwartego i zamkniętego.



Rys.1.Schemat układu regulacji

Rozwiązanie:
Transmitancje poszczególnych elementów:

$$G_1(s) = \frac{5}{s+2} \qquad (1)$$

$$G_2(s) = \frac{4}{5s+2} \qquad (2)$$

Transmitancja układu otwartego:

$$G_0(s) = \frac{20}{(s+4)(5s+2)} \qquad (3)$$

Transmitancja układu otwartego powstała po wymnożeniu transmitancji w bloczkach czyli wzorów (1) i (2)

Równanie charakterystyczne dla układu otwartego:

$$(s+4)(5s+2)=0 \tag{4}$$

$$5s^2+22s+8=0$$

Równanie (4) powstaje poprzez przyrównanie mianownika transmitancji do zera

Współczynniki wielomianu: $a_2=5$, $a_1=22$, $a_0=8$

Liczymy stabilność układu otwartego:

Sprawdzamy warunki Hurwitza:
1)warunek konieczny-wszystkie współczynniki wielomianu dodatnie. W równaniu (4) wszystkie współczynniki istnieją i są dodatnie , więc układ zamknięty może być stabilny , ale nie jest to pewne.
2)warunek wystarczający-wyznaczniki Hurwitza i jego podwyznaczniki mają wartości większe od zera.
Stopień wielomianu n=2

Określamy wyznacznik Hurwitza (5) i jego podwyznacznik (6)

Zgodnie z tabelą wyznacznik $\Delta_n=\Delta_2$ i ma postać:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = 176 > 0 \tag{5}$$

Podwyznacznik pierwszego stopnia:

$$\Delta_1 = a_{n-1} = a_1 = 22 > 0 \tag{6}$$

Drugi warunek Hurwitza jest spełniony ponieważ wyznaczniki (5) i (6) są dodatnie , a zatem układ otwarty jest stabilny.

Badamy układ zamknięty:

Transmitancja układu zamkniętego wynosi:

Transmitancja układu zamkniętego ma wzór (7) ponieważ układ jest ze sprzężeniem zwrotnym

$$G_z(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \tag{7}$$

Po podstawieniu wzorów (1) i (2) do wzoru (7) i wymnożeniu otrzymujemy:

$$G_z(s) = \frac{25s+10}{5s^2+22s+28} \tag{8}$$

Równanie charakterystyczne dla układu zamkniętego ma postać:

$$5s^2+22s+28=0 \tag{9}$$

Współczynniki wielomianu: $a_2=5$,$a_1=22$,$a_0=28$

Liczymy stabilność układu zamkniętego:

Sprawdzamy warunki Hurwitza:
1)warunek konieczny-wszystkie współczynniki wielomianu dodatnie. W równaniu (9) wszystkie współczynniki istnieją i są dodatnie , więc układ zamknięty może być stabilny , ale nie jest to pewne.
2)warunek wystarczający-wyznaczniki Hurwitza i jego podwyznaczniki mają wartości większe od zera.
Stopień wielomianu n=2

Zgodnie z tabelą wyznaczników obliczamy wyznacznik Hurwitza Δ_2 i jego podwyznacznik Δ_1:

Podwyznacznik pierwszego stopnia:

$$\Delta_1 = a_{n-1} = a_1 = 22 > 0 \qquad (10)$$

Podwyznacznik pierwszego stopnia powstał z wydzielenia z wyznacznika Hurwitza Δ_2:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 22 & 5 \\ 0 & 28 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik drugiego stopnia:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 5 \\ 0 & 28 \end{bmatrix} = \qquad (11)$$

$$= 22 \cdot 28 - 5 \cdot 0 = 616 > 0$$

Drugi warunek Hurwitza jest spełniony. Wszystkie wyznaczniki (10), (11) są większe od zera więc układ zamknięty także jest stabilny.

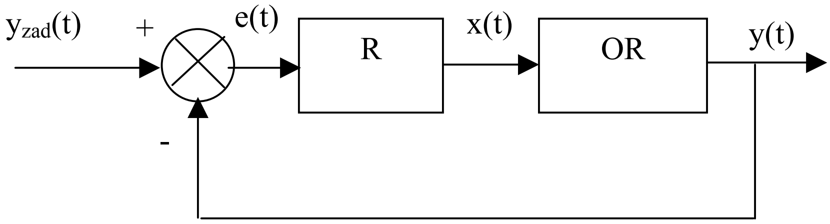
Zadanie 3

Problem: Układ regulacji składa się z obiektu regulacji opisanego równaniem różniczkowym:

$$T_o \cdot \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x$$

oraz , regulatora opisanego równaniem różniczkowym:

$$T_1 \cdot \frac{dx}{dt} + x = T_2 \cdot \frac{de}{dt}$$



Rys.1. Schemat blokowy układu

Zbadać stabilność układu zamkniętego.

Dane:

$T_o = 20$ [s], $T_2 = 10$ [s], $T_1 = 2$[s] , k =5, k_2 =3, przyjmując zerowe warunki początkowe.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy transmitancje operatorową obiektu:

$$20 \cdot \frac{dy}{dt} + y = 5 \cdot x$$

$$20s \cdot Y(s) + Y(s) = 5 \cdot X(s)$$

Transformatę operatorowa obiektu można wyznaczyć przez wyznaczenie transformaty Laplace'a .

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5}{20s+1} \qquad (1)$$

Wyznaczamy transmitancje operatorową regulatora:

$$2 \cdot \frac{dx}{dt} + x = 10 \cdot \frac{de}{dt}$$

$$2 \cdot s \cdot X(s) + X(s) = 10\ E(s)$$

$$H(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{10s}{20s+1} \qquad (2)$$

Transformatę operatorowa regulatora można wyznaczyć przez wyznaczenie transformaty Laplace'a.

Transmitancja operatorowa układu otwartego:

$$G_o(s) = G(s)\ H(s) = \frac{5}{2s+1} \cdot \frac{10s}{20s+1}$$

(3)

$$G_o(s) = \frac{50s}{(20s+1)\cdot(2s+1)}$$

Transformatę operatorową układu otwartego powstała z wymnożenia $G_0(s) = G(s) * H(s)$ (3)

Wyznaczamy równanie charakterystyczne układu:

$$1 + \frac{50s}{(20s+1)\cdot(2s+1)} = 0 \qquad (4)$$

Równanie charakterystyczne to można obliczyć stosując wzór : $1+G_o(s) = 0$

$(20s+1)(2s+1) + 50s = 0$

$40s^2 + 20s + 2s + 1 + 50s = 0$

$40s^2 + 72s + 1 = 0$

(5)

Aby wyznaczyć równanie charakterystyczne układu należy przyrównać do zera mianownik i wyliczyć pierwiastki.

$\Delta = 5024$

$s_1 = = -1{,}785$

$s_2 = = -0{,}015$

Obliczamy Δ oraz pierwiastki s_1, s_2 na podstawie wzorów

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$$

$$s_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

W tym przypadku widać bezpośrednio , że układ zamknięty jest s iastki istnieją i mają wartości rzeczywiste mniejsze od zera $s_{1,2} < 0$.