CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWE
UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Zadanie 1. (Charakterystyki częstotliwościowe)

Problem:
Wyznaczyć charakterystyki częstotliwościowe (amplitudową i fazową) członu całkującego rzeczywistego (z inercją)

$$G(s)=\frac{k}{s(Ts+1)}$$

Do transformaty wstawiamy $s = j\omega$, następnie uwalniamy mianownik od części urojonej (mnożymy mianownik przez sprzężenie), przy czym należy pamiętać, iż $j^2=-1$

Rozwiązanie:

$$G(j\omega)=\frac{k}{j\omega(Tj\omega+1)}=\frac{k\cdot(-j\omega)\cdot(1-Tj\omega)}{\omega^2(T^2\omega^2+1)}=\frac{-jk\omega+kT\omega^2}{\omega^4T^2+\omega^2} \qquad (1)$$

Grupujemy na część rzeczywistą i urojoną by móc zastosować wzór na pulsacje
$A(\omega)=\sqrt{(P(\omega))^2+(Q(\omega))^2}$

$$G(j\omega)=\underbrace{\frac{Tk\omega^2}{\omega^4T^2+\omega^2}}_{P(\omega)}-j\underbrace{\frac{k\omega}{\omega^4T^2+\omega^2}}_{Q(\omega)} \qquad (2)$$

Wykonujemy proste przekształcenia matematyczce

Wyznaczamy pulsacje układu

$$A(\omega)=\sqrt{\left(\frac{Tk\omega^2}{\omega^4T^2+\omega^2}\right)^2-\left(j\frac{k\omega}{\omega^4T^2+\omega^2}\right)^2}= \qquad (3)$$

$$\sqrt{\frac{T^2k^2\omega^4+k^2\omega^2}{(\omega^4T^2+\omega^2)^2}}$$

Doprowadzamy do wyznaczenia k i ω

$$A(\omega)=\sqrt{\frac{k^2(T^2\omega^4+\omega^2)}{(\omega^4T^2+\omega^2)^2}}=k\sqrt{\frac{1}{\omega^2(\omega^2T^2+1)}}= \qquad (4)$$

$$\frac{k}{\omega\sqrt{\omega^2T^2+1}}$$

Wyznaczamy fazę φ(ω) ze wzoru :

$$\varphi(\omega) = arctg\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right)$$

Wyznaczamy rzędnych faza φ (ω)

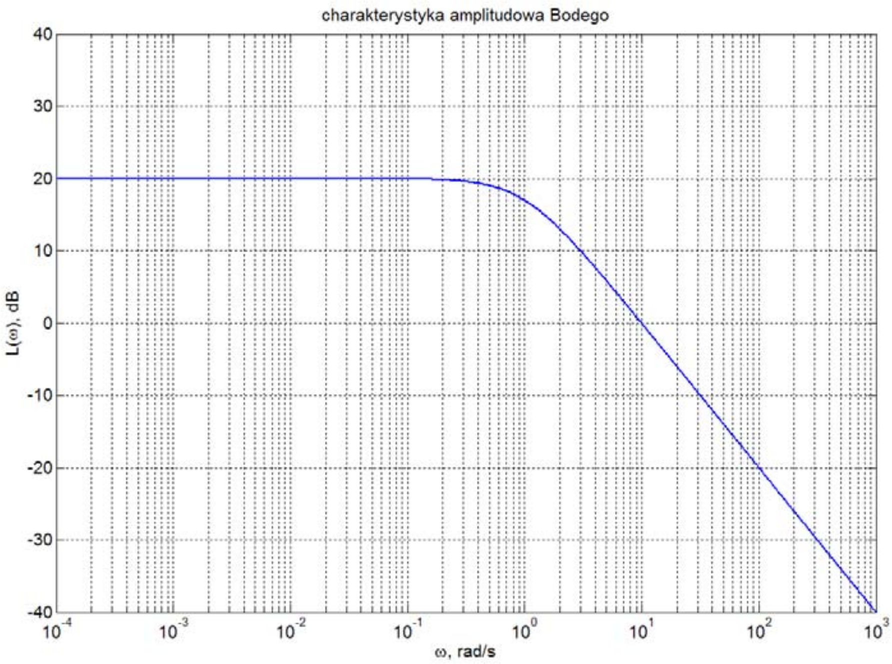
$$\varphi(\omega) = arctg\left(\frac{-\dfrac{k\omega}{\omega^4T^2+\omega^2}}{\dfrac{Tk\omega^2}{\omega^4T^2+\omega^2}}\right) = -\left(\frac{\pi}{2} + arctg\,\omega T\right) \qquad (5)$$

Obliczamy moduł L(ω) transmitancji widmowej G(jω) wyrażony w decybelach, wzór z którego korzystaliśmy $L(\omega) = 20\lg(A(\omega))$ wyliczenia przeprowadzamy by móc narysować charakterystykę amplitudową Bodego.

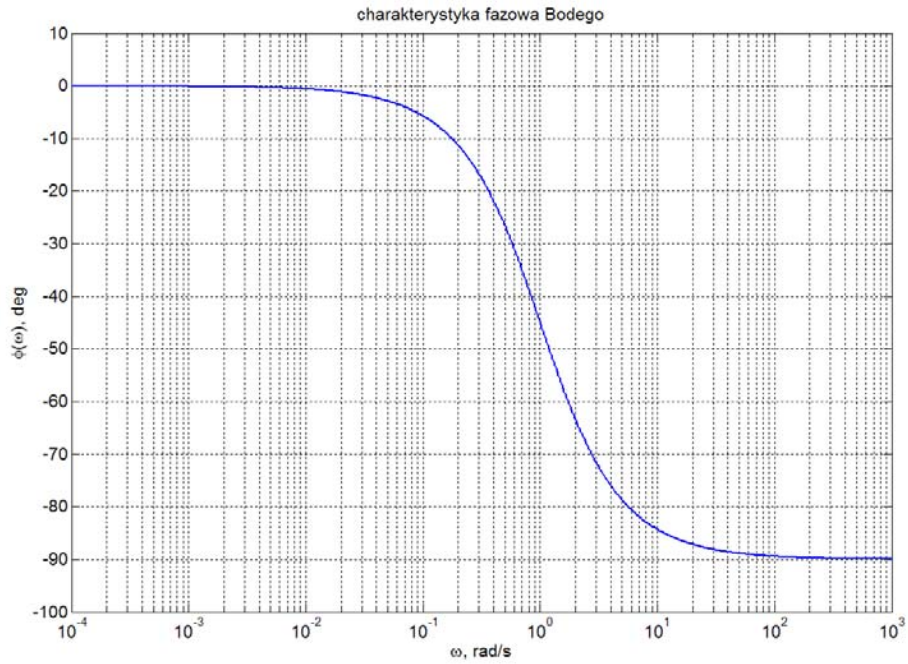
Moduł L(ω) transmitancji widmowej G(jω)

$$L(\omega) = 20\lg\frac{k}{\omega\sqrt{T^2\omega^2+1}} =$$

$$20\log(k) - 20\lg\left(\omega\sqrt{T^2\omega^2+1}\right) \qquad (6)$$



Rys.1 Charakterystyka amplitudowa Bodego dla k=10, T=1s



Rys.2 Charakterystyka fazowa Bodego dla k=10, T=1s

Zadanie 2. (Charakterystyki częstotliwościowe)

Problem:

Wyznaczyć charakterystyki częstotliwościowe (amplitudową i fazową) następującego członu: całkującego idealnego.

$$G(s) = \frac{k}{s}$$

Rozwiązanie:

Mając dane

$$G(s) = \frac{k}{s} \qquad , s = j\omega \tag{1}$$

Po podstawieniu otrzymujemy

Do danego transformaty wstawiamy $s = j\omega$, a następnie uwalniamy mianownik od części urojonej (mnożymy mianownik przez sprzężenie) przy czym należy pamiętać iż $j^2 = -1$

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = \frac{k \cdot (-j\omega)}{\omega^2} \tag{2}$$

Grupujemy na część rzeczywistą i urojoną by móc zastosować wzór na pulsacje $A(\omega) = \sqrt{(P(\omega))^2 + (Q(\omega))^2}$

$$G(j\omega) = -j\frac{k\omega}{\omega^2} \tag{3}$$

Wykonujemy proste przekształcenia matematyczce przy czym należy pamiętać iż $j^2 = -1$

Wyznaczamy pulsacje układu

$$A(\omega)=\sqrt{\left(-j\frac{k\omega}{\omega^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{k^2\omega^2}{\omega^4}} \tag{4}$$

Po skróceniu wyznaczamy współczynniki k i ω

$$A(\omega)=\sqrt{\frac{k^2}{\omega^2}}=\frac{k}{\omega} \tag{5}$$

Wyznaczamy fazę φ(ω) ze wzoru :

$$\varphi(\omega)=arctg\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right)$$

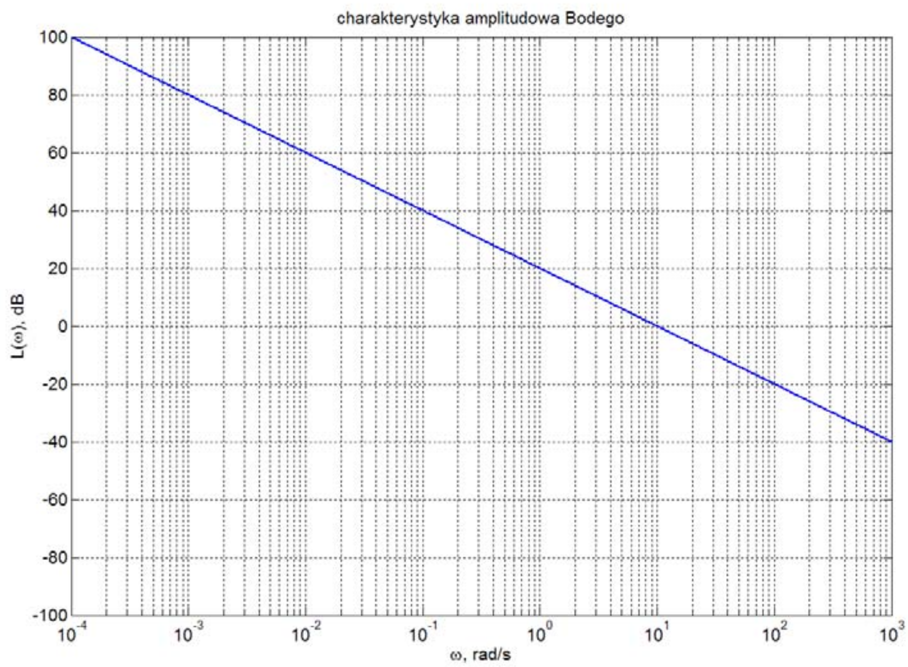
Wyznaczamy rzędnych faza φ (ω)

$$\varphi(\omega)=arctg\left(-\frac{k\omega}{\omega^2}\right)=-\frac{\pi}{2} \tag{6}$$

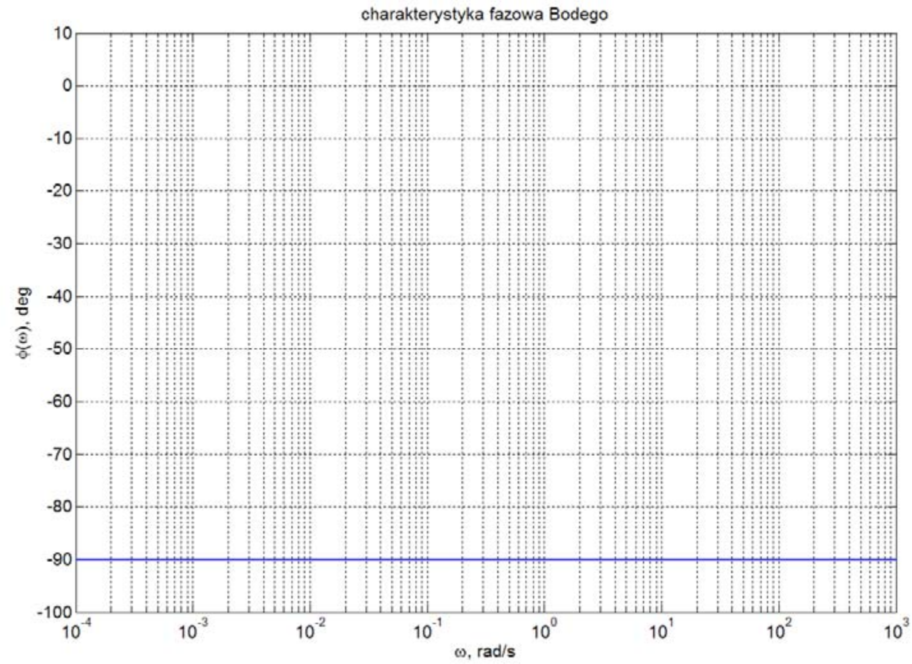
Obliczamy moduł L(ω) transmitancji widmowej G(jω) wyrażony w decybelach. Wzór z którego korzystaliśmy: $L(\omega)=20\lg(A(\omega))$. Wyliczenia przeprowadzamy aby narysować charakterystykę amplitudową Bodego.

Moduł L(ω) transmitancji widmowej G(jω)

$$L(\omega)=20\lg\frac{k}{\omega\sqrt{T^2\omega^2+1}}=20\log(k)-20\lg(\omega) \tag{7}$$



Rys.1 Charakterystyka amplitudowa Bodego dla k=10



Rys.2 Charakterystyka fazowa Bodego dla k=10, T=1s

Zadanie 3. (Charakterystyki częstotliwościowe)

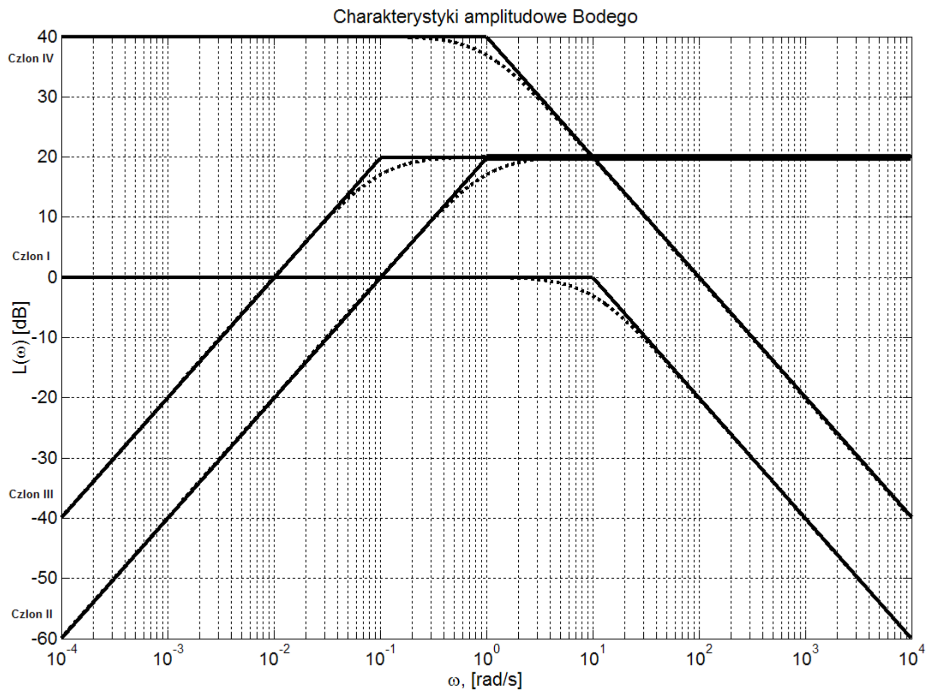
Wyznaczyć charakterystykę amplitudową i fazową Bodego dla układu o transmitancji

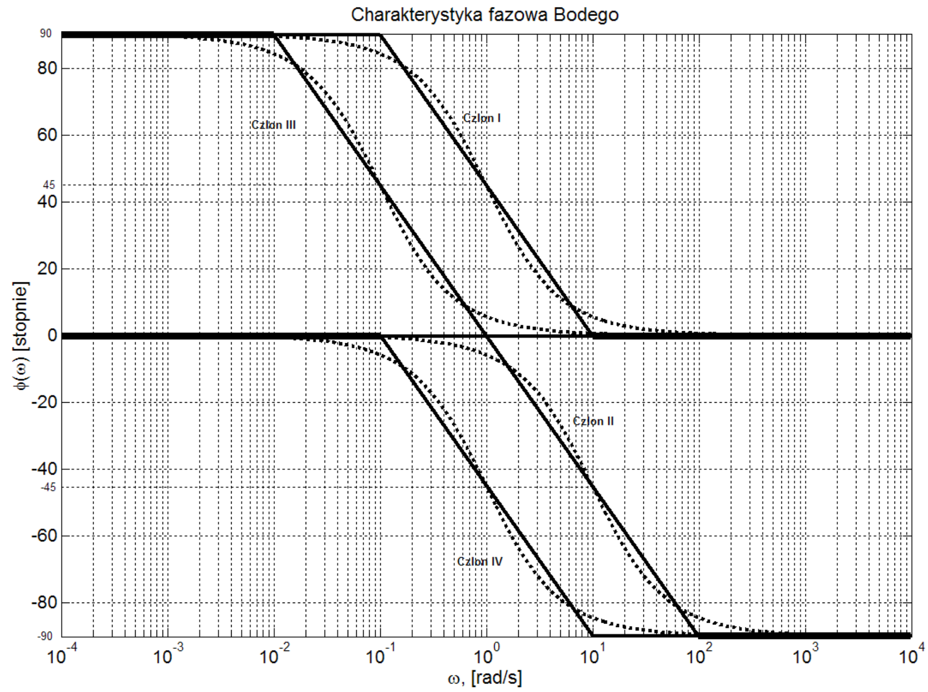
$$G(s) = \left(\frac{10s}{s+10}\right)\left(\frac{1}{0{,}1s+1}\right)\left(\frac{100s}{10s+1}\right)\left(\frac{100}{s+100}\right)$$

Charakterystyki poszczególnych członów.

- Człon I – $\left(\frac{10s}{s+10}\right)$
- Człon II – $\left(\frac{1}{0{,}1s+1}\right)$
- Człon III – $\left(\frac{100s}{10s+1}\right)$
- Człon IV – $\left(\frac{100}{s+100}\right)$

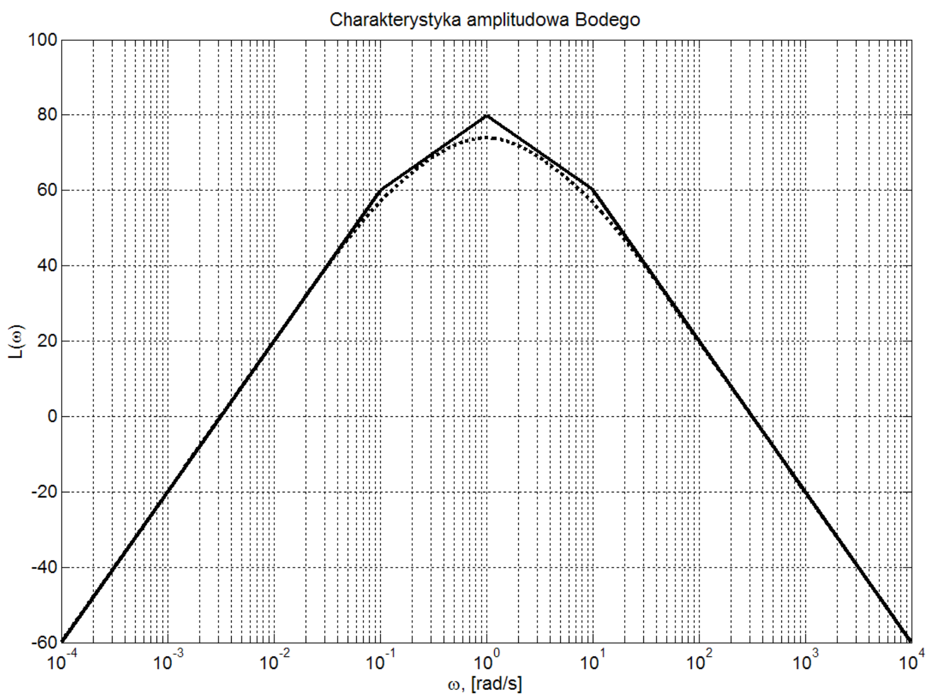
Zestawienie charakterystyk na jednym wykresie

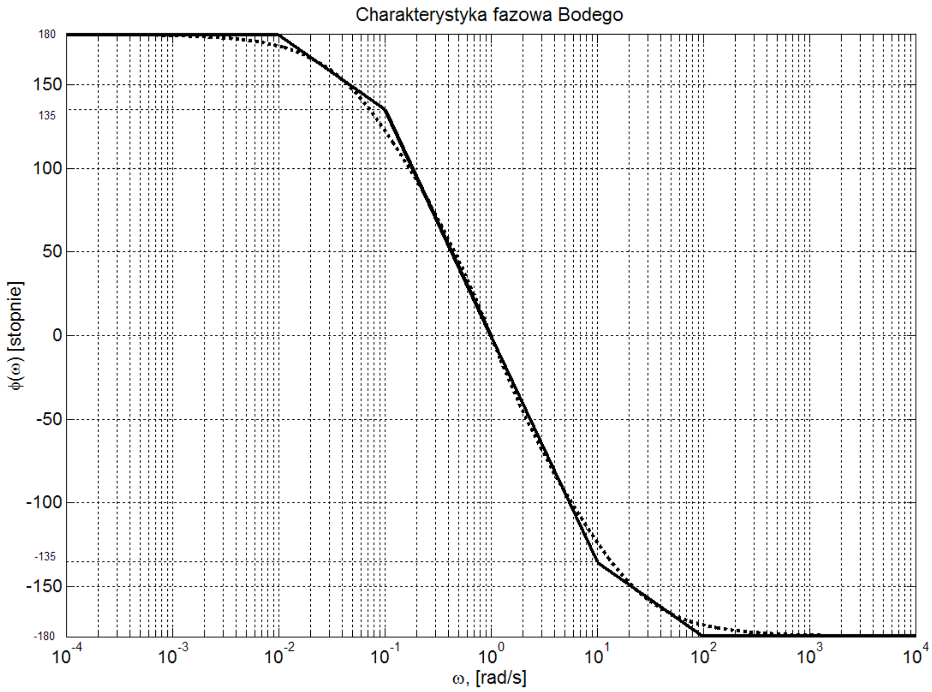




Charakterystyki wypadkowe układu o transmitancji:

$$G(s) = \left(\frac{10s}{s+10}\right)\left(\frac{1}{0{,}1s+1}\right)\left(\frac{100s}{10s+1}\right)\left(\frac{100}{s+100}\right)$$





Zadanie 4. (Charakterystyki częstotliwościowe)

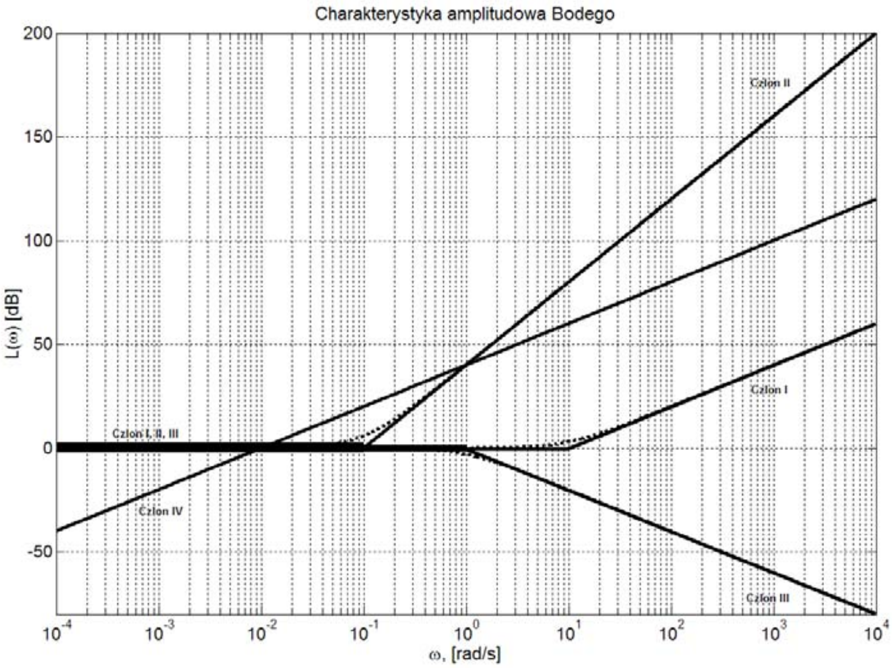
Wyznaczyć charakterystykę amplitudową i fazową Bodego dla układu o transmitancji

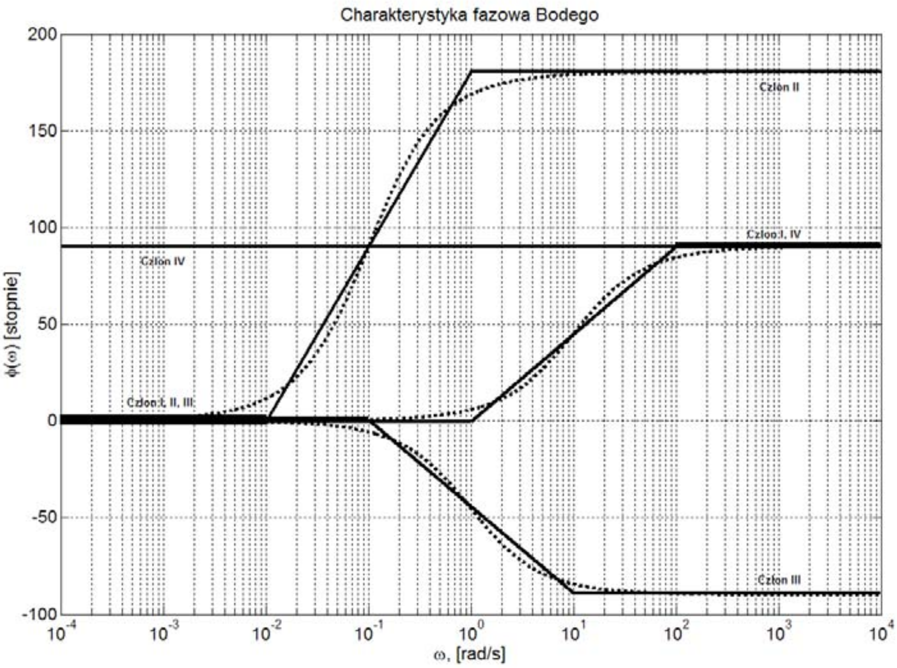
$$G(s) = (0{,}1s+1)(10s+1)^2\left(\frac{1}{s+1}\right)(100s)$$

Charakterystyki poszczególnych członów.

- Człon I – $(0{,}1s+1)$
- Człon II – $(10s+1)^2$
- Człon III – $\left(\frac{1}{s+1}\right)$
- Człon IV – $(100s)$

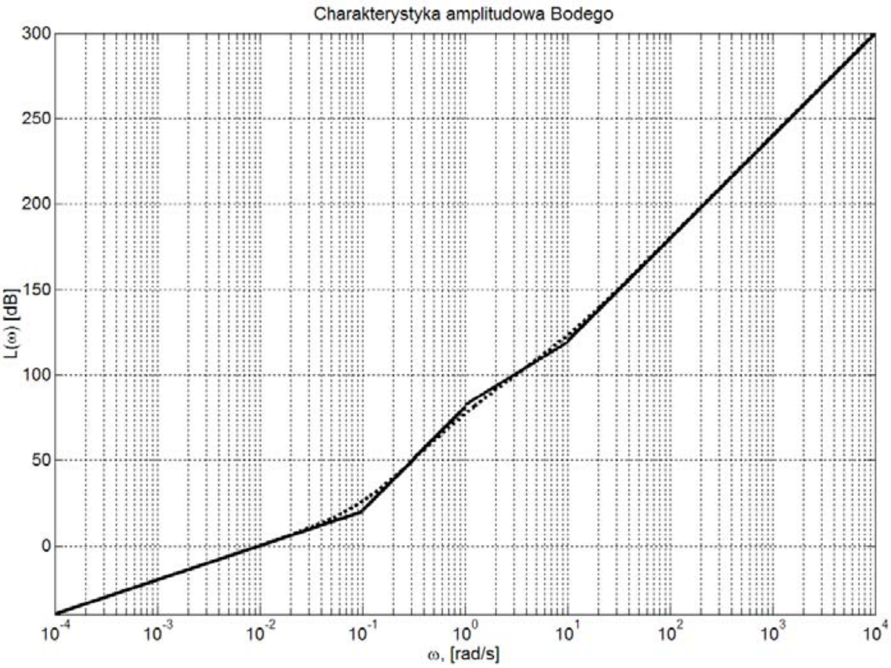
Zestawienie charakterystyk na jednym wykresie

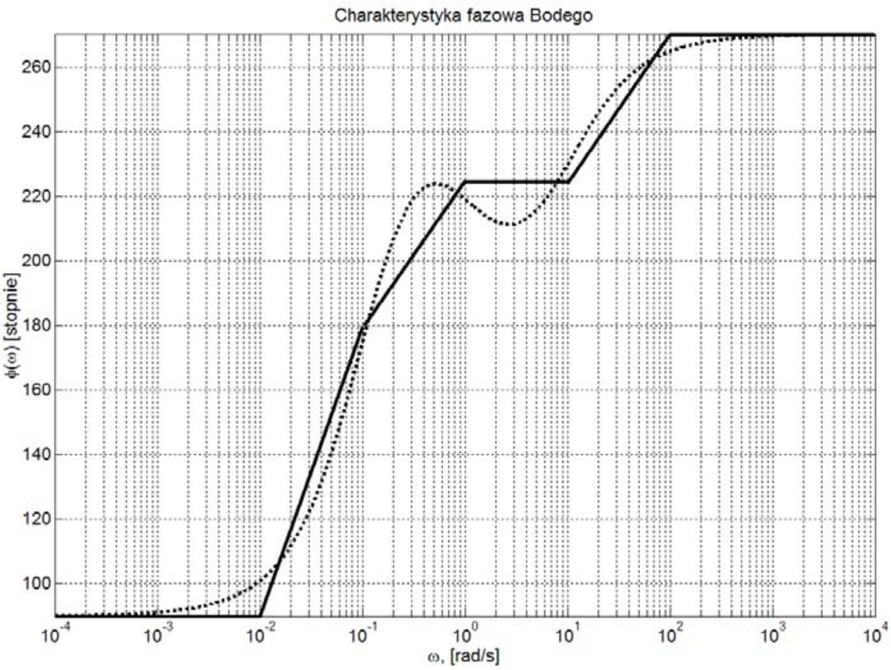




Charakterystyki wypadkowe układu o transmitancji:

$$G(s) = (0{,}1s+1)(10s+1)^2\left(\frac{1}{s+1}\right)(100s)$$


Charakterystyka amplitudowa Bodego
L(ω) [dB]
ω, [rad/s]


Charakterystyka fazowa Bodego
φ(ω) [stopnie]
ω, [rad/s]

Zadanie 5. (Charakterystyki częstotliwościowe)

Problem:
Wyznaczyć uogólnione charakterystyki: amplitudową i fazową oraz amplitudowo-fazową dla członu z opóźnieniem.

Rozwiązanie:

Równanie członu z opóźnieniem ma postać:

$$kx(t-T)=y \tag{1}$$

gdzie T – czas opóźnienia.
Jeżeli na wejściu członu pojawi się sygnał harmoniczny

$$x\,(=\;x_0\,e^{j\varpi t} \tag{2}$$

to sygnał wyjściowy ma postać:

$$y(t)=G(j\omega)x_0e^{j\varpi t}. \tag{3}$$

następnie należy ustalić postać przepustowości widmowej:

$$G(j\omega)=ke^{-j\varpi t} \tag{4}$$

To wyrażenie powstało w taki sposób, ponieważ przepustowość Laplace'a członu z opóźnieniem o równaniu (1) wyraża się wzorem: $G(s)=ke^{-sT}$

stąd:

$$G(j\omega)=k(\cos T\omega-j\sin T\omega) \tag{5}$$

Taką postać otrzymuje się korzystając z twierdzenia Eulera dla liczb zespolonych patrz podr. Matemetyka T. Trajdos cz.III rozdział VIII, p.4.

stąd:
$P(\omega)=k\cos T\omega$; część rzeczywista (6)
$Q(\omega)=-k\sin T\omega$; część urojona (7)

Następnie obliczamy moduł transmitancji widmowej widmowej:

$$A(\omega)=\sqrt{P(\omega)^2+Q(\omega)^2}=\sqrt{k^2(\cos^2 T\omega+\sin^2 T\omega)}=k \tag{8}$$

lub:

$$\frac{A(\omega)}{k}=1 \tag{9}$$

Wówczas można obliczyć argument transmitancji widmowej:

$$\varphi(\omega)=arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=arctg\frac{-k\sin T\omega}{k\cos T\omega}=-arctg(tgT\omega)=-T\omega \tag{10}$$

W tym przypadku moduł i argument przepustowości widmowej są widoczne bezpośrednio ze wzoru (4)

Wyznaczamy charakterystykę amplitudową i fazową

$$P(\omega)^2 + Q(\omega)^2 = k^2\cos^2 T\omega + k^2\sin^2 T\omega = k^2 . \qquad (11)$$

lub:

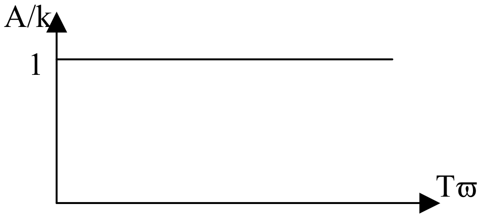
$$\left(\frac{P}{k}\right)^2 + \left(\frac{Q}{k}\right)^2 = 1 \qquad (12)$$

Uogólnioną charakterystykę amplitudowo – fazową najłatwiej wyznaczyć podnosząc wyrażenia (6) oraz (7) do kwadratu i je zsumować.

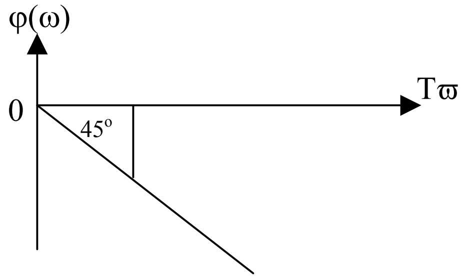
Wzór ten przedstawia równanie okręgu o promieniu jednostkowym i o środku położonym w początku układu współrzędnych.

Charakterystyki uogólnione mają postać

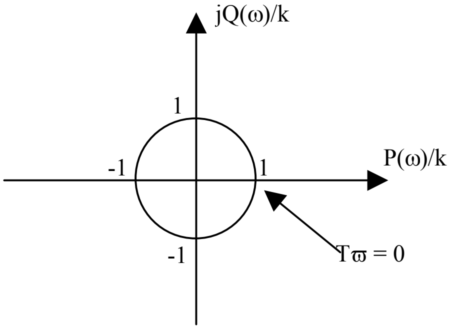
:



Charakterystyka amplitudowa.



Charakterystyka fazowa.

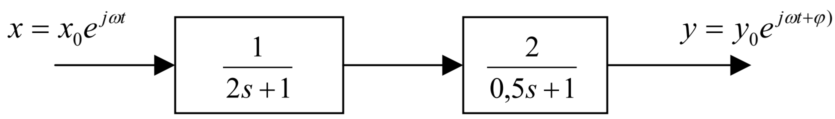


Charakterystyka amplitudowo – fazowa.

Zadanie 6. (Charakterystyki częstotliwościowe)

Problem:

Na wejściu układu przedstawionego na schemacie blokowym, wprowadzono sygnał harmoniczny o amplitudzie $x_0 = 2$ i częstotliwości $\omega = 0,5$ rad/sek. Wyznaczyć amplitudę $y_0 =$ i kąt przesunięcia fazowego φ sygnału wyjściowego.



Rysunek 8.1

Rozwiązanie:

Przepustowość układu wynosi:

$$G(s) = \frac{1}{2s+1} \cdot \frac{2}{0,5s+1} = \frac{2}{s^2 + 2,5s + 1} \qquad (1)$$

Na podstawie transmitancji układu należy wyznaczyć transmitancję widmową (s=jω):

$$G(j\omega) = \frac{2(1-\omega^2) - j5\omega}{(1-\omega^2)^2 + 6,25\omega^2}; \qquad (2)$$

stąd:

$$P(\omega) = \frac{2(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2 + 6,25\omega^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{-5\omega}{(1-\omega^2)^2 + 6,25\omega^2} \qquad (3)$$

Wszystkie objaśnienia odnośnie zastosowanych w zadaniu wzorów i obliczeń znajduja się w zadaniu 7.

Podstawiając za $\omega = 0,5$ rad/s otrzymuje się:

P(0,5) = 0,70;
Q(0,5) = -1,18; (4)

Moduł przepustowości widmowej dla częstotliwości $\omega = 0,5$ rad/s wynosi:

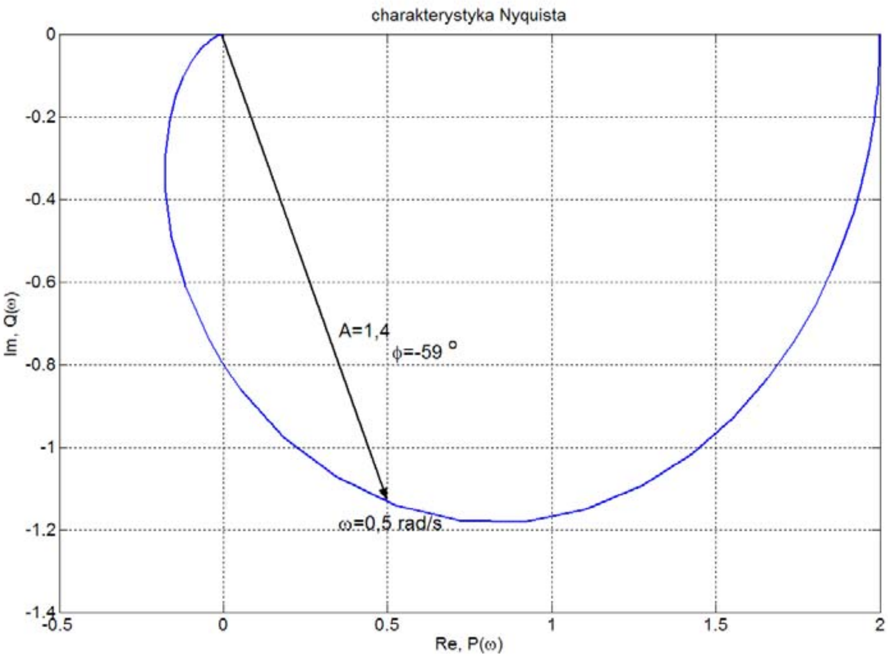
$$A(0,5) = \sqrt{P(0,5)^2 + Q(0,5)^2} = \sqrt{(0,7)^2 + (-1,18)^2} = 1,4; \qquad (5)$$

Stąd amplituda sygnału wyjściowego wyniesie:

$$y_0 = Ax_0 = 1,4 \cdot 2 = 2,8. \qquad (6)$$

zatem argument przepustowości widmowej dla ω = 0,5 rad/s, a tym samym kąt przesunięcia fazowego sygnału wyjściowego wynosi:

$$\varphi(0{,}5) = arctg\frac{Q(0{,}5)}{P(0{,}5)} = arctg\frac{-1{,}18}{0{,}7} \cong -59^{\circ}$$



Charakterystyka Nyquista dla rozważanego układu

Zadanie 7. (Charakterystyki częstotliwościowe)

Problem:
Wyznaczyć charakterystyki częstotliwościowe : amplitudowo-fazową Nyquista oraz amplitudową i fazową Bode'go dla układu o transmitancji G(s).

$$G(s) = \frac{6}{(s+3)(s+2)} = \frac{6}{s^2+5s+6} \tag{1}$$

Transmitancja widmowa (2) :za s=jω
P(ω) część rzeczywista
Q(ω) część urojona

Rozwiązanie:

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \tag{2}$$

$$G(j\omega) = \frac{6}{-\omega^2+5j\omega+6} = \frac{6}{(6-\omega^2)+j5\omega} \cdot \frac{(6-\omega^2)-j5\omega}{(6-\omega^2)-j5\omega} =$$
$$\frac{(36+6\omega^2)-j30\omega}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2} = \frac{36-6\omega^2}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2} + j\frac{-30\omega}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2} \tag{3}$$

Moduł transmitancji widmowej to pierwiastek z sumy kwadratów części rzeczywistej P(ω) i części urojonej Q(ω) (4)

Część rzeczywista i urojona:

$$P(\omega) = \frac{36-6\omega^2}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2} \quad ;Q(\omega) = -\frac{30\omega}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2} \tag{4}$$

Charakterystyka amplitudowa:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)} \tag{5}$$

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{(36-6\omega^2)^2+(30\omega)^2}{\left[(6-\omega^2)^2+25\omega^2\right]^2}} = \frac{\sqrt{36\omega^4+468\omega^2+1296}}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2} =$$
$$A(\omega) = \frac{6\sqrt{\omega^4+13\omega^2+36}}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2} \tag{6}$$

Kąt przesunięcia fazowego

Charakterystyka fazowa:

$$\varphi(\omega) = arctg\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = arctg\left(\frac{-30\omega}{36-6\omega^2}\right) = -arctg\left(\frac{5\omega}{6-\omega^2}\right) \tag{7}$$

Wzmocnienie:

$$L(\omega) = 20\log|A(\omega)| = 20\log\frac{6\sqrt{\omega^4+13\omega^2+36}}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2} \tag{8}$$

Punkty charakterystyczne ch-ki amplitudowo-fazowej Nyquista:

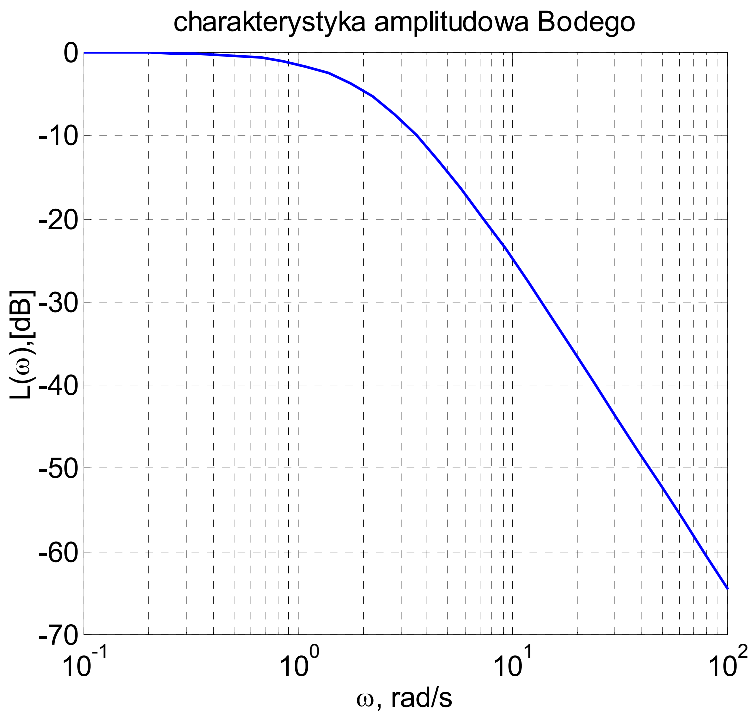
ω→0 P(0)=1 Q(ω)=0
ω→∞ P(ω)=0 Q(∞)=0

Przecięcie z osią Q(ω):

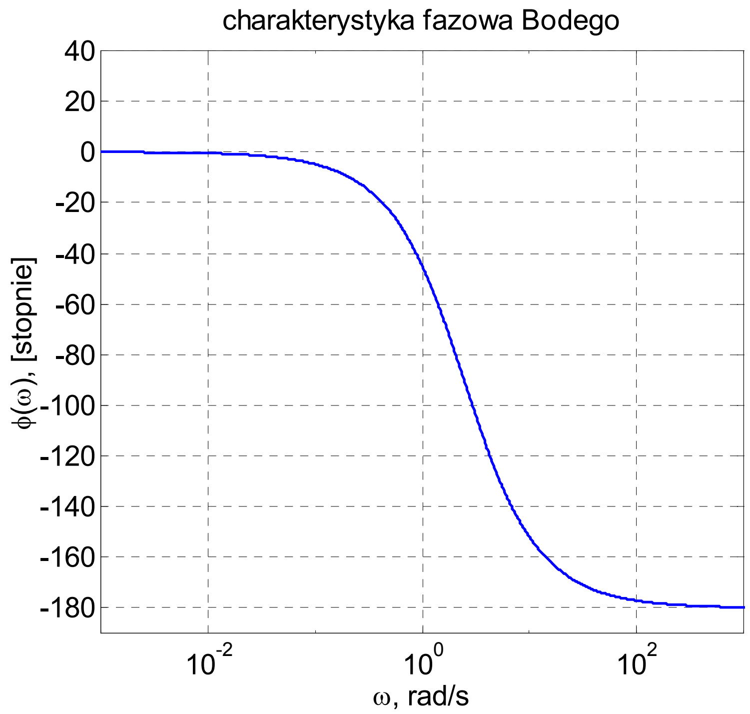
Ze wzoru (9) wybieramy wartość dla $\omega = \sqrt{6}$ (dla dodatniej wartości częstotliwości).

P(ω)=0

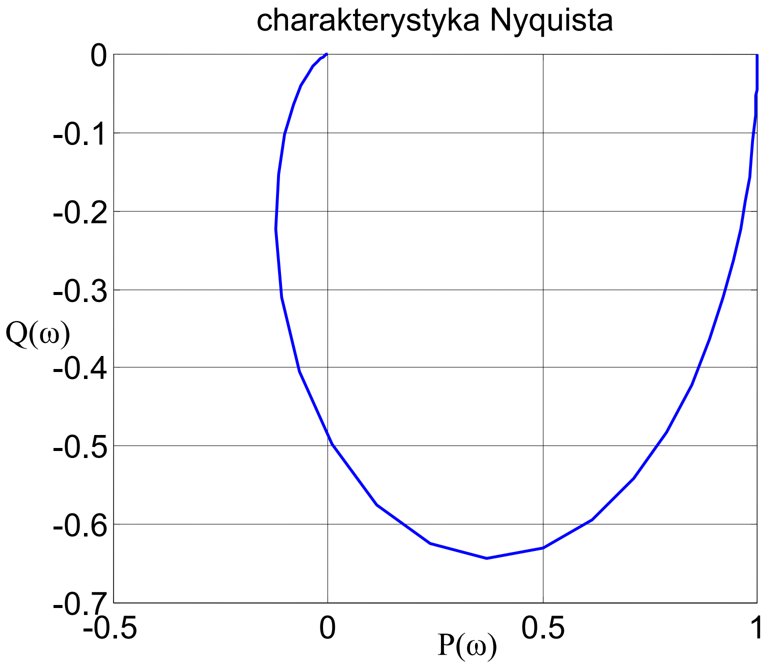
$$36-6\omega^2 = 0$$
$$\omega^2 - 6 = 0$$
$$\omega = -\sqrt{6} \quad \omega = \sqrt{6} \tag{9}$$
$$Q(\sqrt{6}) = 0{,}49$$



Wykres 1.Charakterystyka amplitudowa Bode'go.



Wykres 2.Charakterystyka fazowa Bode'go.



Wykres 3.Charakterystyka amplitudowo-fazowa Nyquista.