CHARAKTERYSTYKI CZASOWE UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Zadanie 1 Charakterystyki czasowe układów.

Problem:
Wyznaczyć odpowiedz skokową i impulsową całkującego z inercją

Odpowiedź skokową wyznacza się ze wzoru:

$$h(t) = L^{-1}\{G(s)X(s)\}$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

gdzie:

$X(s) = \frac{1}{s}$ jest skokiem jednostkowym

$$G(s) = \frac{k}{(1+sT)s} \tag{1}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{(1+sT)s} \tag{2}$$

$$k = 1; T = 1 \tag{3}$$

Odpowiedź skokowa

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{k}{s(1+sT)}\right\} \tag{4}$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2(1+sT)}\right\} \tag{5}$$

Rozkładamy na ułamki proste

$$\frac{k}{s^2(Ts+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{Ts+1}\Bigg| \cdot s^2(Ts+1) \tag{6}$$

$$k = A*(Ts+1) + Bs(Ts+1) + Cs^2 \tag{7}$$

$$k = s^2(B+C) + s(AT+B) + A \tag{8}$$

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ AT + B = 0 \\ A = k \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} C = -B \\ B = -AT \\ A = k \end{cases} \tag{10}$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2} - \frac{kT}{s} + \frac{kT}{Ts+1}\right\} \tag{11}$$

$$h(t) = kt - kT + kTe^{-\frac{t}{T}} \tag{12}$$

$$h(t) = k\left[t - T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right] \tag{13}$$

Odpowiedź impulsowa:

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{s(1+sT)}\right\} \tag{14}$$

Odpowiedź impulsowa wyznacza się ze wzoru:

$(t) = L^{-1}\{G(s) * X(s)\}$

$g(t) = L^{-1}\{G(s) * 1\}$

$(t) \quad {}^{-1}\{G(s)\}$

gdzie:

$X(s) = 1$ jest transformatą impulsu Diraca ($x(t)=\delta(t)$)

Rozkładamy na ułamki proste

$$\frac{k}{s(Ts+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{Ts+1}\Big| \cdot s(Ts+1) \tag{15}$$

$$k = A(Ts+1) + Bs \tag{16}$$

$$k = s(AT+B) + A \tag{17}$$

$$\begin{cases} A = k \\ 0 = AT + B \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} A = k \\ -kT = B \end{cases} \tag{19}$$

$$\frac{k}{s(Ts+1)} = \frac{k}{s} + \frac{-kT}{Ts+1} \tag{20}$$

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{s} + \frac{-AT}{Ts+1}\right\} \tag{21}$$

$$g(t) = k - kTe^{-\frac{t}{T}} \tag{22}$$

$$g(t) = k(1 - Te^{-\frac{t}{T}}) \tag{23}$$

Odpowiedź liniowa

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{s(1+sT)}\frac{1}{s^2}\right\} \tag{24}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{s^3(1+sT)}\right\} \tag{25}$$

Odpowiedz liniową oblicza się ze wzoru:

$y(t) = L^{-1}\{G(s)X(s)\}$

$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{aG(s)}{s^2}\right\}$

gdzie:

„a" jest to wartość stała, prędkość narastania sygnału

$X(s) = \frac{1}{s^2} * a$

Rozkładamy na ułamki proste

$$\frac{k}{s^3(Ts+1)} = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{Ts+1}\Big| \cdot s^3(Ts+1) \tag{26}$$

$$k = (D + CT)s^3 + (BT + C)s^2 + (AT + B)s + A \tag{27}$$

$$\begin{cases} A = k \\ AT + B = 0 \\ BT + c = 0 \\ D + CT = 0 \end{cases} \tag{28}$$

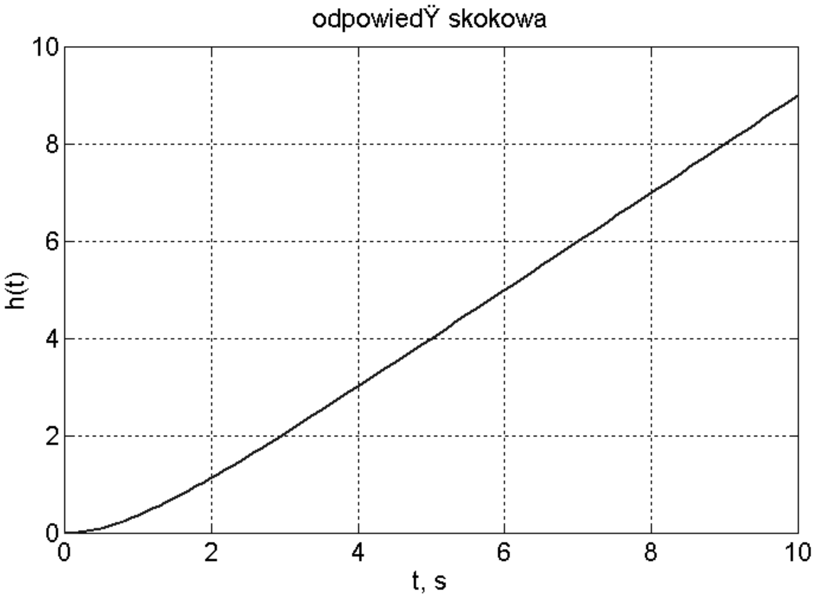
$$\begin{cases} A = k \\ kT + B = 0 \Rightarrow B = -kT \\ -kT + C = 0 \Rightarrow C = kT \\ D + kT^2 = 0 \Rightarrow D = -kT^2 \end{cases} \quad (28)$$

$$\frac{k}{s^3(Ts+1)} = \frac{kT}{s^3} - \frac{kT}{s^2} + \frac{kT}{s} - \frac{kT^2}{Ts+1} \quad (30)$$

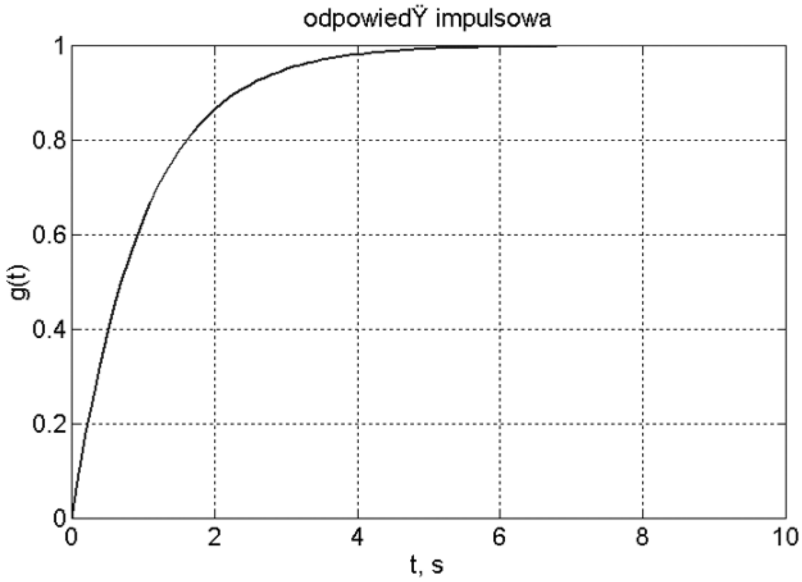
$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{kT}{s^3} - \frac{kT}{s^2} + \frac{kT}{s} - \frac{kT^2}{Ts+1}\right\} \quad (31)$$

$$y(t) = k\left(\frac{t^2}{2} - T * t + T - T^2 e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad (32)$$

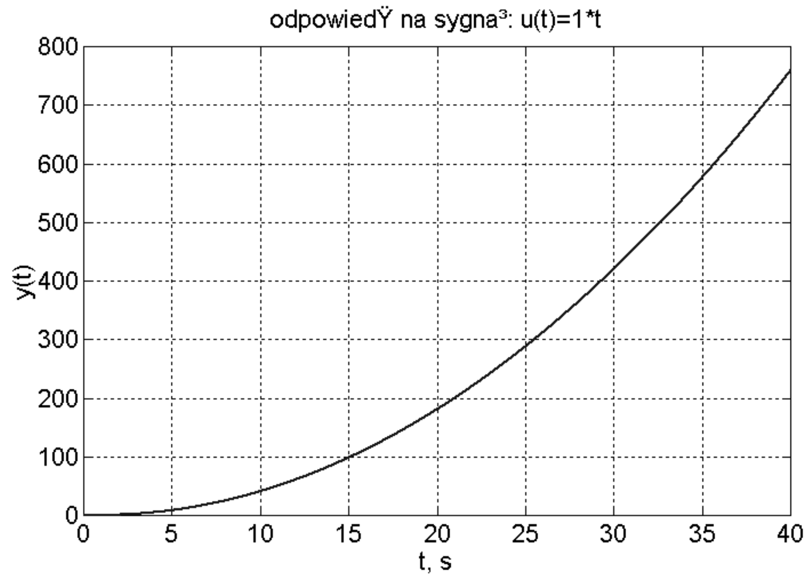
$$y(t) = kT^2\left(\frac{t^2}{2T^2} - \frac{t}{T} + \frac{1}{T} - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad (33)$$



Rys. 1 Odpowiedz skokowa.



Rys. 2 Odpowiedź impulsowa.



Rys. 3 Odpowiedź liniowa

Zadanie 2 Charakterystyki czasowe układów.

Problem:
Wyznaczyć odpowiedz skokową i impulsową obiektu różniczkowego z inercją (przy wyznaczeniu odpowiedzi impulsowej rząd względny funkcji wymiernej , której orginał ma być wyznaczony wynosi zero , w związku z czym nie można bezpośrednio zastosować wzoru na transformatę odwrotną).

$$G(s) = \frac{sk}{1+sT} \tag{1}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{sk}{1+sT} \tag{2}$$

$$k = 1; T = 1 \tag{3}$$

Odpowiedź skokowa

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{sk}{1+sT}\right\} \tag{4}$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{1+sT}\right\} \tag{5}$$

Odpowiedź skokową wyznacza się ze wzoru:

$$h(t) = L^{-1}\{G(s) * X(s)\}$$

$$h(t) = {}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

gdzie:

$X(s) = \frac{1}{s}$ jest skokiem jednostkowym

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{T\left(\frac{1}{T}+s\right)}\right\} \tag{6}$$

$$h(t) = \frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}} \tag{7}$$

Odpowiedź impulsowa

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{sk}{1+sT}\right\} \qquad (8)$$

Odpowiedź impulsową wyznacza się ze wzoru:

$$g(t) = L^{-1}\{G(s) * X(s)\}$$

$$g(t) = L^{-1}\{G(s) * 1\}$$

$$(t) \qquad ^{-1}\{G(s)\}$$

gdzie:

$X(s) = 1$ jest transformatą impulsu Diraca

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{T\frac{k}{T} + \frac{k}{T} - \frac{k}{T}}{1+sT}\right\} \qquad (9)$$

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{T}\frac{1+sT}{1+sT} - \frac{\frac{k}{T}}{1+sT}\right\} \qquad (10)$$

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{T} - \frac{\frac{k}{T}}{1+sT}\right\} \qquad (11)$$

$$g(t) = \frac{k}{T}\delta(t) - \frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}} \qquad (12)$$

$\delta(t)$ - impuls Diraca

$$L^{-1}\left\{\tfrac{k}{T}\right\} = \delta(t)$$

natomiast

$$L^{-1}\left\{\tfrac{1}{1+sT}\right\} = e^{-\frac{t}{T}}$$

$$g(t) = \frac{k}{T}(\delta(t) - e^{-\frac{t}{T}}) \qquad (13)$$

Odpowiedź liniowa

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{sk}{(1+sT)} * \frac{1}{s^2}\right\} \qquad (14)$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{s(1+sT)}\right\} \qquad (15)$$

Odpowiedz liniowa oblicza się ze wzoru:

$$y(t) = L^{-1}\{G(s)X(s)\}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{aG(s)}{s^2}\right\}$$

gdzie:
„a” jest to wartość stała, jest to prędkość narastania sygnału linowego

$$X(s) = \frac{1}{s^2}a$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{sT(\frac{1}{T}+s)}\right\} \qquad (16)$$

Rozkładamy na ułamki proste

$$\frac{k}{sT(\frac{1}{T}+s)} = \frac{A}{sT} + \frac{B}{\frac{1}{T}+s} \Big| \cdot sT(\frac{1}{T}+s) \qquad (17)$$

$$k = A(\frac{1}{T}+s) + BsT \qquad (18)$$

$$k = (A+BT)s + \frac{A}{T} \qquad (19)$$

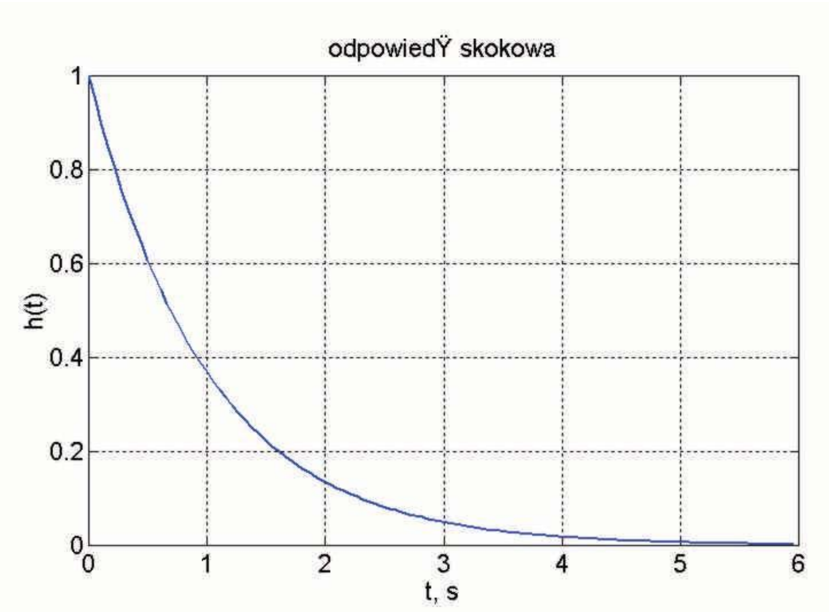
$$k = \frac{A}{T} \Rightarrow kT = A \tag{20}$$

$$BT + A = 0 \Rightarrow B = -\frac{A}{T} \tag{21}$$

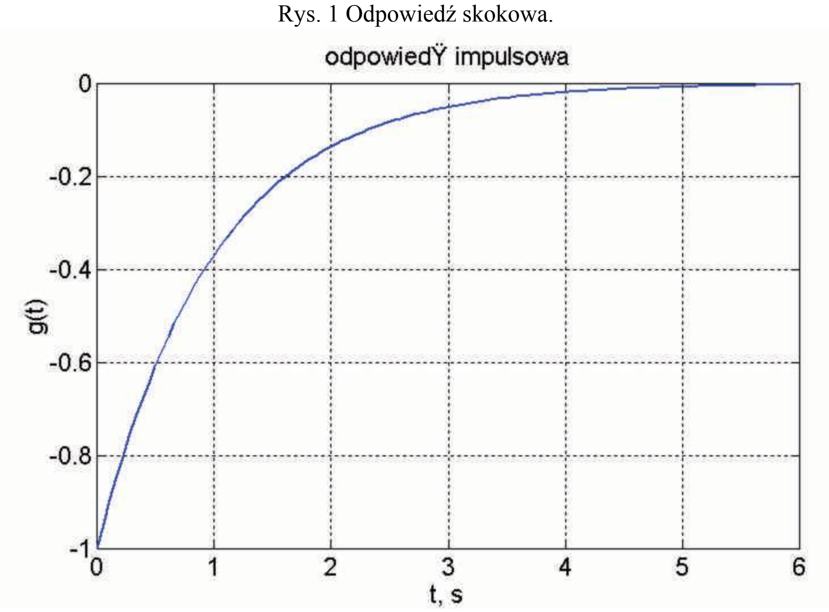
$$B = -\frac{k}{T}T \Rightarrow B = -k \tag{22}$$

$$\frac{k}{sT(\frac{1}{T}+s)} = \frac{kT}{sT} - \frac{k}{\frac{1}{T}+s} \tag{23}$$

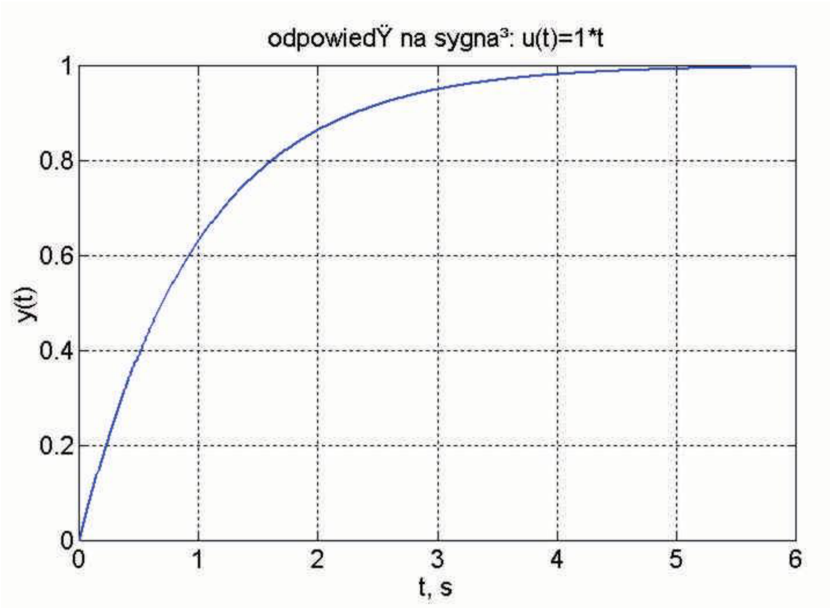
$$y(t) = k - ke^{-\frac{t}{T}} = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \tag{24}$$



Rys. 1 Odpowiedź skokowa.



Rys. 2 Odpowiedź impulsowa.



Rys. 3 Odpowiedź liniowa

Zadanie 3 (charakterystyki czasowe układów)

Problem:

Obliczyć charakterystykę skokową i impulsową układu dynamicznego o transmitancji

$$G(s) = \frac{5}{s}$$

Transmitancja członu całkującego

Rozwiązanie:

Transformata wymuszenia skokowego

$$L[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s}.$$

Transformata odpowiedzi skokowej

$$H(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{5}{s^2}.$$

Stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a albo korzystając z tablicy transformat, łatwo znajdziemy charakterystykę skokową

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left[\frac{5}{s^2}\right] = 5t\mathbf{1}(t)$$

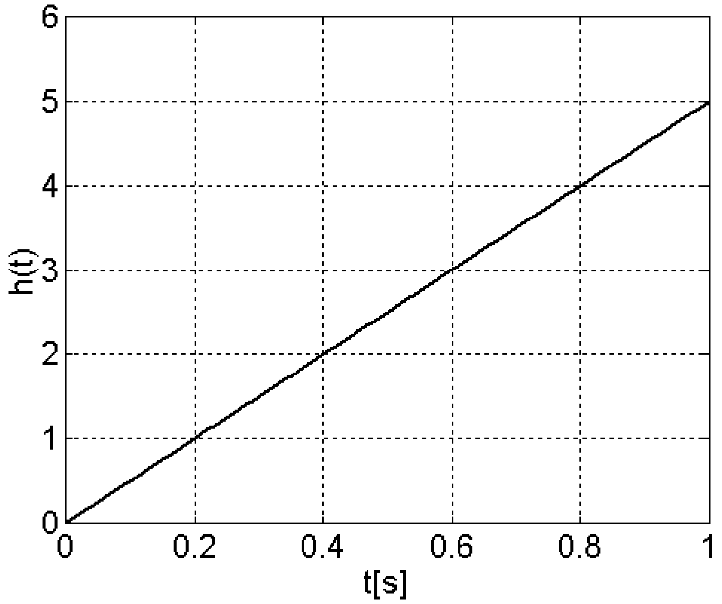
Patrz tablice transformat

dla t = 0[s]	h(t) = 0
dla t = 0,2[s]	h(t) = 1
dla t = 0,4[s]	h(t) = 2
dla t = 0,6[s]	h(t) = 3
dla t = 0,8[s]	h(t) = 4
dla t = 1[s]	h(t) = 5

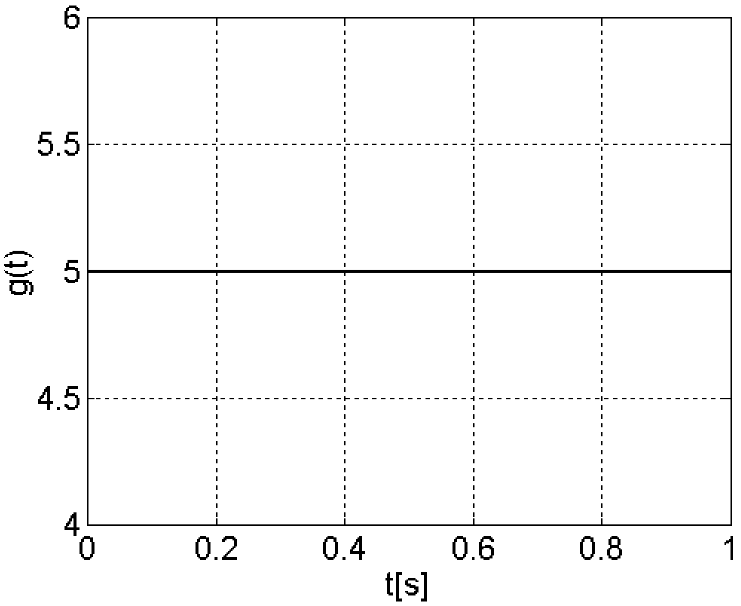
Charakterystykę impulsową znajdziemy stosując wzór:

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t) = \frac{d}{dt}\left[5t\mathbf{1}(t)\right] = 5\mathbf{1}(t) \ .$$
$$g(t) = 5\mathbf{1}(t)$$

Charakterystyka impulsowa jest pochodną odpowiedzi skokowej.



Rys.5.1 Charakterystyka skokowa



Rys.5.2 Charakterystyka impulsowa

Zadanie 4 (charakterystyki czasowe układów)

Problem:
Obliczyć charakterystykę skokową i impulsową układu dynamicznego o transmitancji

$$G(s)=\frac{1}{(2s+1)(3s+2)}$$

Transmitancja członu inercyjnego II rzędu

Rozwiązanie:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)s}\right]=$$
$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{a}e^{-at}-\frac{1}{b}e^{-bt}\right)$$
$$a\neq b$$

Transformata wymuszenia skokowego

$$L[\mathbf{1}(t)]=\frac{1}{s}.$$

Transformata odpowiedzi skokowej

$$H(s)=\frac{1}{s}G(s)=\frac{1}{s(2s+1)(3s+2)}.$$

Stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a albo korzystając z tablicy transformat, łatwo znajdziemy charakterystykę skokową

$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{(2s+1)(3s+2)s}\right]=\left[\frac{1}{2}-\left(2e^{-\frac{1}{2}t}-\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}t}\right)\right]\mathbf{1}(t)$$

dla t = 0[s]	h(t) = 0
dla t = 2[s]	h(t) = 0,160
dla t = 4[s]	h(t) = 0,334
dla t = 6[s]	h(t) = 0,428
dla t = 8[s]	h(t) = 0,471
dla t = 10[s]	h(t) = 0,488
dla t = 12[s]	h(t) = 0,496

Charakterystyka impulsowa jest pochodną odpowiedzi skokowej.

Charakterystykę impulsową znajdziemy stosując wzór:

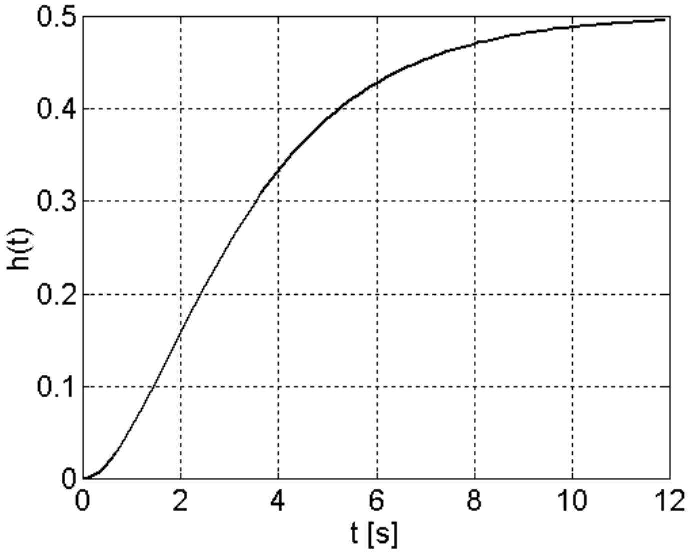
$$g(t)=\frac{d}{dt}h(t)=\frac{d}{dt}\left[\left[\frac{1}{2}-\left(2e^{-\frac{1}{2}t}-\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}t}\right)\right]\mathbf{1}(t)\right]=$$

$$\frac{1}{2}\delta(t)-2e^{-\frac{1}{2}t}\left[\delta(t)-\frac{1}{2}\mathbf{1}(t)\right]+\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}t}\left[\delta(t)-\frac{2}{3}\mathbf{1}(t)\right]$$

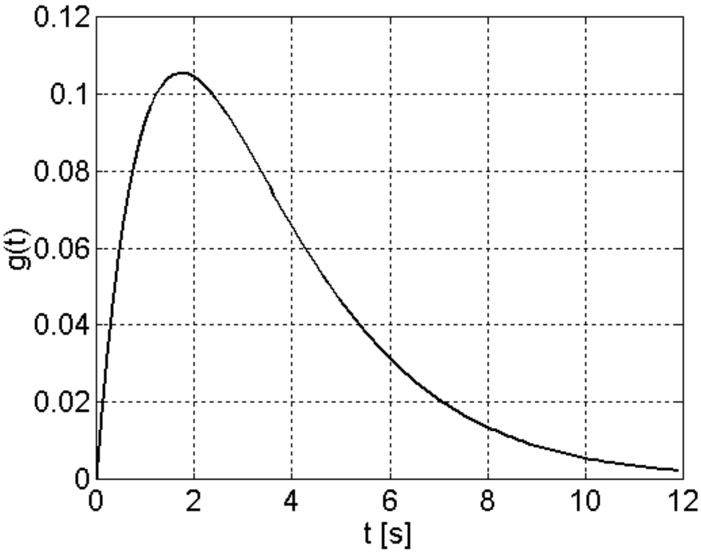
dla t = 0[s]	g(t) = 0
dla t = 2[s]	g(t) = 0,104
dla t = 4[s]	g(t) = 0,066
dla t = 6[s]	g(t) = 0,031
dla t = 8[s]	g(t) = 0,013
dla t = 10[s]	g(t) = 0,005
dla t = 12[s]	g(t) = 0,002

Impuls Diraca δ(t) jest pochodna skoku jednostkowego.

$$\delta(t)=\begin{cases}0\,dla\,t\neq 0\\ \infty\,dla\,t=0\end{cases}$$



Rys.6.1 Charakterystyka skokowa



Rys.6.2 Charakterystyka impulsowa

Zadanie 5 (charakterystyki czasowe układów)

Problem:

Znaleźć zależność między parametrami charakterystyki czasowej elementu oscylacyjnego i współczynnikami liczbowymi występującymi we wzorze na transmitancję operatorową.

$$F(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}.$$

Jak wyznaczyć k, T i ξ na podstawie danej charakterystyki czasowej?

Rozwiązanie:

Równanie charakterystyki czasowej elementu oscylacyjnego dla wymuszenia skokowego x = x_0 1(t) wynika z następujących przekształceń:

$$Y(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \cdot \frac{x_0}{s} = \frac{k x_0}{T^2 s\left[(s+\delta_0)^2 + \varpi_0\right]} =$$
$$= A\frac{1}{s} + B\frac{\varpi_0}{(s+\delta_0)^2 + \varpi_0^{\ 2}} + C\frac{s+\delta_0}{(s+\delta_0)^2 + \varpi_0^{\ 2}}$$

$\delta_0 + \varpi_0$ znajdujemy z warunku:

$$(s+\delta_0)^2 + \varpi_0^{\ 2} = s^2 + 2\delta_0 s + \delta_0^{\ 2} + \varpi_0^{\ 2} = s^2 + 2\frac{\xi}{T}s + \frac{1}{T^2}$$

$$\delta_0 = \frac{\xi}{T}$$

$$\delta_0^{\ 2} + \varpi_0^{\ 2} = \frac{1}{T^2}$$

$$\varpi_0^{\ 2} = \frac{1}{T^2}\left(1-\xi^2\right)$$

Stałe A, B, C wynoszą

A = kx_0

$$B = -kx_0\frac{\delta_0}{\omega_0} = -kx_0\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$C = -kx_0$$

Równanie charakterystyki czasowej mając postać

$$y(t) = kx_0\left[1 - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\delta_0 \cdot t}\sin\varpi_0 \cdot t - e^{-\delta_0 \cdot t}\cos\varpi_0 \cdot t\right]$$

przekształcamy do postaci

$$y(t) = kx_0\left[1 - \frac{e^{-\delta_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_0 t + \varphi)\right]$$

kąt φ znajdujemy z warunku:

$$\sin(\varpi_0 t+\varphi)=\cos\varphi\cdot\sin\varpi_0 t+\sin\varphi\cdot\cos\varpi_0 t=$$
$$=\xi\sin\varpi_0 t+\sqrt{1+\xi^2}\cos\varpi_0 t$$

$$(\cos\varphi-\xi)\sin\varpi_0 t+\left(\sin\varphi-\sqrt{1-\xi^2}\right)\cos\varpi_0\cdot t=0$$

$\cos\varphi=\xi$ $\qquad\qquad \xi\le 1$

$\sin\varphi=\sqrt{1-\xi^2}$

$tg\varphi=\sqrt{\dfrac{1-\xi^2}{\xi}}$.

Zadanie 6 (Charakterystyki czasowe układów)

Problem:
Wyznaczyć odpowiedź układu przy zerowych warunkach początkowych, jeżeli dana jest transformata G (s) oraz sygnał wejściowy e(t).

$$G(s)=\frac{s-2}{s^2+5s+6} \qquad\qquad e(t)=5\sin(t)1(t)$$

Rozwiązanie:

Oznaczamy przez y (t) sygnał wejściowy.

Wykorzystując definicje transmitancji, znajdujemy: $Y(s)=G(s)\cdot E(s)$

$$y(t)=L^{-1}\{G(s)E(s)\} \tag{1}$$

Powstaje zależność

Transformata Lapace'a $L^{-1}(\sin\omega t)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega}$

$$E(s)=L^{-1}\{5\sin(t)\}=\frac{5}{s^2+1} \tag{2}$$

Podstawiając równanie (2) oraz transmitancje od definicji transmitancji otrzymujemy

Otrzymujemy równanie:

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{5(s-2)}{(s^2+5s+6)(s^2-1)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{5(s-2)}{(s+2)(s-2)(s^2-1)}\right\} \tag{3}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)(s-1)(s+1)}\right\}$$

Wykonujemy przekształcenia matematyczne $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ przy czym x_1 i x_2 to pierwiastki rów. kwadratowego, po czym skracamy z licznik z mianownikiem.

Równanie (4)

$$Y(s)=\frac{5}{(s+2)(s^2+1)}=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s-j}+\frac{k_3}{s+j}$$

Rozkład funkcji na ułamki proste w celu wykonania odwrotnego przekształcenia Lapace'a, tabela z transformatami została dodana do zadania

Równanie (5)

$$k_1=\lim_{s\to -2}\frac{5}{s^2+1}=1$$

Równanie (6)

$$k_2=\lim_{s\to -j}\frac{5}{(s+2)(s+j)}=\frac{5}{(j+2)2j}=\frac{5}{2(2j-1)}=-\frac{1}{2}(1+2j)$$

Postać współczynników rozkładu funkcji

Równanie (7)

$$k_2=k_3{*}=-\frac{1}{2}(1-2j)$$

Równanie (8)

$$y(t)=e^{-2t}+2\operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{2}(1+2j)e^{jt}\right\}=\left(e^{-2t}-\cos t+2\sin t\right)\quad t\geq 0$$

Odpowiedz układu przy zerowych warunkach początkowych jest więc następująca, po zastosowaniu transformaty Lapace'a

Zadanie 7 (Charakterystyki czasowe układów)

Problem:
Wyznaczyć odpowiedź układu przy zerowych warunkach początkowych, jeżeli dana jest transformata G (s) oraz sygnał wejściowy e(t).

$$G(s)=\frac{s+1}{s^2+36} \qquad e(t)=e^{-2t}\cdot 1(t)$$

Rozwiązanie:

Oznaczamy przez y (t) sygnał wejściowy.
Równanie (1)

$$y(t)=L^{-1}\{G(s)E(s)\}$$

Wykorzystując definicje transmitancji, znajdujemy:

Powstaje zależność
Równanie (2)

$$E(s)=L\{e^{-2t}\}=\frac{1}{s+2}$$

Transformata Lapace'a $e^{at} = \frac{1}{s-2}$

Podstawiając równanie (2) oraz transmitancje od definicji transmitancji otrzymujemy

Równanie (3)

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2+36)\cdot(s+2)}\right\}$$

Rozkład funkcji na ułamki proste w celu wykonania odwrotnego przekształcenia Lapace'a, tabela z transformatami została dodana do zadania

Równanie (4)

$$Y(s)=\frac{s+1}{(s^2+36)}\cdot\frac{1}{(s+2)}=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s-j6}+\frac{k_3}{s+j6}$$

Równanie (5)

$$k_1=\lim_{s\to -2}\frac{s+1}{s^2+36}=\frac{1}{40}$$

Równanie (6)

$$k_2=\lim_{s\to -j6}\frac{s+1}{(s+2)(s+j6)}=\frac{3-j19}{240}$$

Postać współczynników rozkładu funkcji

Równanie (7)

$$k_2=k_3{}^*=\frac{3+j19}{240}$$

Równanie (8)

$$y(t) = -\frac{1}{40}e^{-2t} + 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{3+j19}{240}e^{j6}\right\} = \left(-\frac{1}{40}e^{-2t} + \frac{1}{40}\cos 6t + \frac{19}{120}\sin 6t\right)$$

$t \geq 0$

Odpowiedz układu przy zerowych warunkach początkowych jest więc następująca, po zastosowaniu transformaty Lapace’a