

Wydział Elektryczny
ZTMAiPC

LABORATORIUM PODSTAW AUTOMATYKI

Ćwiczenie 11 AS

Sterowanie układem aktywnego zawieszenia

Cel ćwiczenia

- Identyfikacja parametrów dynamicznych fizycznego modelu aktywnego zawieszenia.
- Zaprojektowanie regulacji ze sprzężeniem stanu i obserwatorem dla modelu aktywnego zawieszenia.
- Zapoznanie się z układem laboratoryjnym regulacji modelu aktywnego zawieszenia oraz uruchomienie i przetestowanie regulacji w czasie rzeczywistym.

1. Wprowadzenie

Konwencjonalne zawieszenia pojazdów są kompromisem pomiędzy dwiema przeciwstawnymi kryteriami: właściwościami jezdnyimi (sztywnością i tłumieniem drgań zawieszenia) i komfortem jazdy (większym dla miękkiego zawieszenia). Technologia aktywnego zawieszenia polega na ciągłym sterowaniu pionowego ruchu koła za pomocą aktywnego siłownika umieszczonego na osi pionowej zawieszenia. Umożliwia to spełnienie obu wymienionych kryteriów jednocześnie.

Laboratoryjny model aktywnego zawieszenia z jednym punktem styczności z podłożem jest z punktu widzenia teorii sterowania układem wielowymiarowym (*Multi-Input Multi Output* – MIMO). Wygodną metodą projektowania algorytmów regulacji dla układów MIMO jest projektowanie regulacji w przestrzeni stanu układu (*state-space*) na podstawie modelu zmiennych stanu.

Zadanie do realizacji polega na zaprojektowaniu i uruchomieniu w czasie rzeczywistym regulacji laboratoryjnego modelu aktywnego zawieszenia ze sprzężeniem stanu i obserwatorem.

➤ **Uwaga:** Podstawy teoretyczne projektowania regulacji liniowej ciągłej w przestrzeni stanu są przedstawione w **Dodatku** na końcu niniejszej instrukcji. Ich znajomość jest niezbędna do zrozumienia dalszej części instrukcji i do realizacji ćwiczenia na stanowisku laboratoryjnym.

1.1. Model matematyczny układu aktywnego zawieszenia

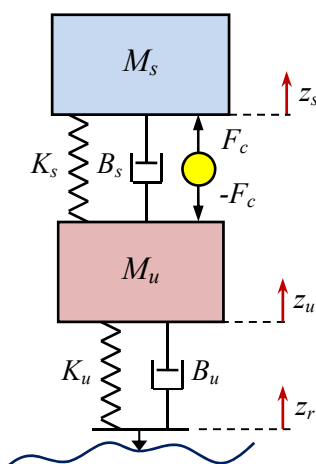
Podstawowy model układu aktywnego zawieszenia z jednym punktem styczności z podłożem jest przedstawiony na rys. Rys. 1.1. Model składa się z dwóch mas; każda z nich jest podparta sprężyną i amortyzatorem (tłumikiem drgań).

- M_s jest masą resorowaną (*sprung mass*) reprezentującą masę nadwozia pojazdu z ładunkiem (np. pasażerami). Sprężyna o współczynniku sprężystości K_s i amortyzator o współczynniku tarcia lepkiego B_s reprezentują pasywną część zawieszenia nadwozia.
- M_u jest masą nieresorowaną (*unsprung mass*) reprezentującą masę koła z oponą. Sprężyna o współczynniku sprężystości K_u i amortyzator o współczynniku tarcia lepkiego B_u reprezentują sprężystość i tłumienie opony w kontakcie z podłożem.
- F_c jest siłą generowaną przez siłownik aktywnego zawieszenia. W laboratoryjnym modelu fizycznym siłownikiem jest silnik elektryczny ze śrubową przekładnią obrotowo-liniową.

- współrzędna z_r reprezentuje poziom podłoża (drogi), zaś z_u i z_s reprezentują pionowe przesunięcia mas M_u i M_s względem poziomów stanu równowagi dla $z_u=0$ i $F_c=0$ (tzn. $z_u=z_s=0$ dla $z_u=0$ i $F_c=0$, stan równowagi uwzględnia już ściśnięcia sprężyn równoważące siłę ciężenia, co upraszcza równania).

Zakładamy, że sprężyny, amortyzatory oraz siłownik są elementami liniowymi i w związku z tym model dynamiki aktywnego zawieszenia jest modelem liniowym.

- Uwaga: W przypadku sprężyn nieliniowych przesunięcia należałoby liczyć względem poziomów dla sprężyn swobodnych (nieściśniętych) i włączyć do równań siłę ciężenia. Dlaczego?



Rys. 1.1. Model układu aktywnego zawieszenia z jednym punktem styczności z podłożem. Wielkością sterującą jest siła $F_c(t)$ wytwarzana przez siłownik

Przyśpieszenie \ddot{z}_s masy nadwozia M_s wywołuje suma działających na nią sił: sprężyny i amortyzatora zawieszenia oraz siły wytwarzanej przez siłownik (kropki nad zmiennymi oznaczają pochodne po czasie):

$$M_s \ddot{z}_s = F_{K_s} + F_{B_s} + F_c, \quad F_{K_s} = -K_s(z_s - z_u), \quad F_{B_s} = -B_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u)$$

Przyśpieszenie \ddot{z}_u masy koła M_u wywołuje suma sił działających na nie od góry (te same, które działają na masę M_s , ale o przeciwnym zwrocie) oraz od dołu, tj. sprężystości i tłumienia opony:

$$M_u \ddot{z}_u = -F_{K_s} - F_{B_s} - F_c + F_{K_u} + F_{B_u}, \quad F_{K_u} = -K_u(z_u - z_r), \quad F_{B_u} = -B_u(\dot{z}_u - \dot{z}_r)$$

Dynamika układu jest więc opisana przez układ równań:

$$\begin{cases} M_s \ddot{z}_s = -K_s(z_s - z_u) - B_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + F_c \\ M_u \ddot{z}_u = K_s(z_s - z_u) + B_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) - K_u(z_u - z_r) - B_u(\dot{z}_u - \dot{z}_r) - F_c \end{cases} \quad (1.1)$$

Jest to układ czwartego rzędu zawierający cztery elementy magazynujące energię: dwie masy (energia kinetyczna) oraz dwie sprężyny (energia potencjalna). Sygnałami wejściowymi są: siła F_c wytwarzana przez siłownik i poziom drogi z_r .

- Siła F_c stanowi wejście sterujące, zadaniem układu regulacji będzie generowanie jej w taki sposób, aby osiągnąć określony cel, np. minimalizację przyśpieszenia działającego na pasażerów (przyśpieszenia masy M_s), co zapewnia komfort jazdy.
- Poziom drogi z_r jest wejściem zakłócenia, które nie podlega sterowaniu. Zadaniem układu regulacji jest kompensowanie efektów zakłócenia, w tym przypadku tłumienie drgań spowodowanych nierównościami drogi.

Wybór wielkości mierzonych w układzie sterowania jest podyktowany: 1) łatwością pomiaru lub w ogóle dostępnością danego sygnału, 2) kosztem zainstalowania czujnika oraz 3) koniecznością zapewnienia obserwowalności dynamiki obiektu. W przypadku sterowania zawieszeniem wielkościami stosunkowo łatwymi do zmierzenia w praktyce są: ugięcie (kompresja) zawieszenia,

czyli różnica $z_s - z_u$, oraz pionowe przyspieszenie nadwozia \ddot{z}_s . Obie te wielkości są mierzone w laboratoryjnym modelu aktywnego zawieszenia, odpowiednio za pomocą enkodera i akcelerometru, i będą stanowiły wyjściowe sygnały modelu zmiennych stanu tworzące sprzężenie zwrotne układu sterowania. Wyjścia mierzone stanowią równocześnie wielkości sterowane, które mają być minimalizowane w stanach przejściowych wywołanych działaniem zakłócenia i sprowadzone do zera w stanie ustalonym. Minimalizacja ugięcia zawieszenia $z_s - z_u$ oznacza jego usztywnienie, co poprawia stabilność jazdy, z kolei minimalizacja przyspieszenia nadwozia \ddot{z}_s oznacza większy komfort.

- W modelu laboratoryjnym mierzone są też (za pomocą enkoderów): poziom podłoża z_r i przesunięcie nadwozia z_s , ale pomiary te nie są wykorzystywane do sterowania zawieszeniem, a jedynie do bezpośredniej obserwacji zmiennych stanu. Sygnał z_r stanowi poza tym sprzężenie zwrotne dodatkowego regulatora poziomu podłoża i umożliwia uzyskanie zadanego przebiegu zakłócenia oddziałującego na układ aktywnego zawieszenia.

Zmienne stanu modelu aktywnego zawieszenia powinny być wybrane w taki sposób, aby odzwierciedlały wskaźniki jakości działania, które w efekcie regulacji mają być osiągnięte lub optymalizowane, oraz umożliwiały możliwie łatwe zaprojektowanie w regulatorze sprzężenia stanu i obserwatora.

Dla rozpatrywanego modelu zawieszenia wektory stanu $\mathbf{x}(t)$, wejścia zakłócenia $\mathbf{z}(t)$, wejścia sterującego $\mathbf{u}(t)$ oraz wyjścia (mierzonego i jednocześnie sterowanego) $\mathbf{y}(t)$ zostaną zdefiniowane w następujący sposób (por. równanie (D.1)):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_s - z_u \\ \dot{z}_s \\ z_u - z_r \\ \dot{z}_u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = [\dot{z}_r], \quad \mathbf{u} = [F_c], \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_s - z_u \\ \ddot{z}_s \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Dla tak zdefiniowanych zmiennych stanu, wejść i wyjść standardowa czwórka macierzy \mathbf{A} , $[\mathbf{B}_z \ \mathbf{B}]$, \mathbf{C} , $[\mathbf{D}_z \ \mathbf{D}]$ opisujących pełny układ (z wejściami sterującymi i zakłóceniami) w przestrzeni stanu przyjmują następującą formę:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_u} & \frac{B_s}{M_u} & \frac{k_u}{M_u} & -\frac{B_s + B_u}{M_u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{B_u}{M_u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_u} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{M_s} \end{bmatrix}$$

Zwróćmy uwagę, że wejściowym zakłóceniem nie jest poziom drogi, ale prędkość zmian tego poziomu \dot{z}_r , co daje prostsze równania, ale wymaga wyznaczania pochodnej generowanego bezpośrednio przebiegu z_r .

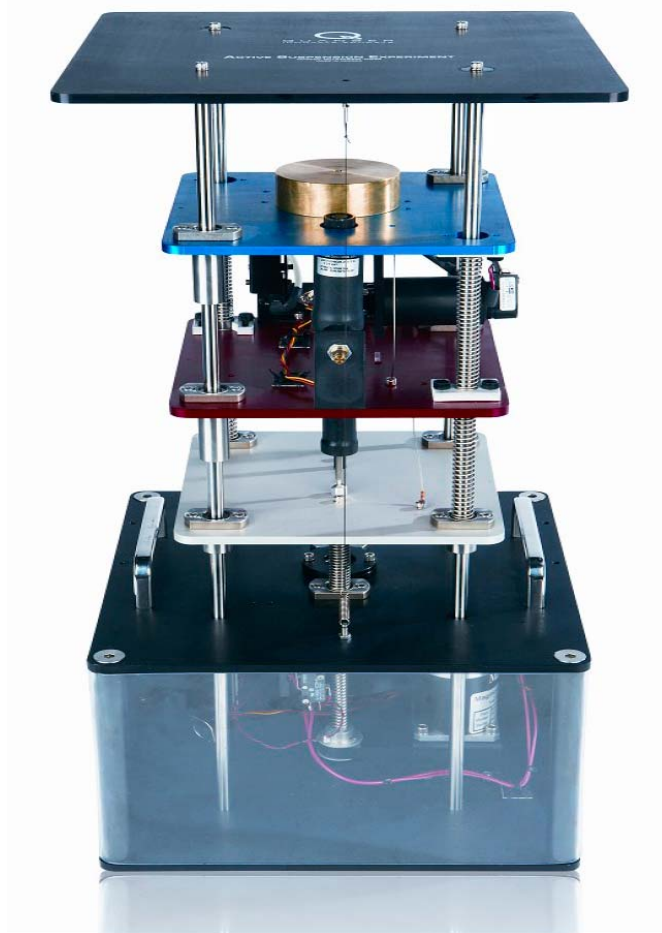
Wartości parametrów fizycznych laboratoryjnego modelu aktywnego zawieszenia występujących w macierzach $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_u} & \frac{B_s}{M_u} & \frac{k_u}{M_u} & -\frac{B_s + B_u}{M_u} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{B_u}{M_u} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_u} \end{bmatrix}$

(1.3) modelu matematycznego są podane w Tabela 2.

2. Stanowisko laboratoryjne

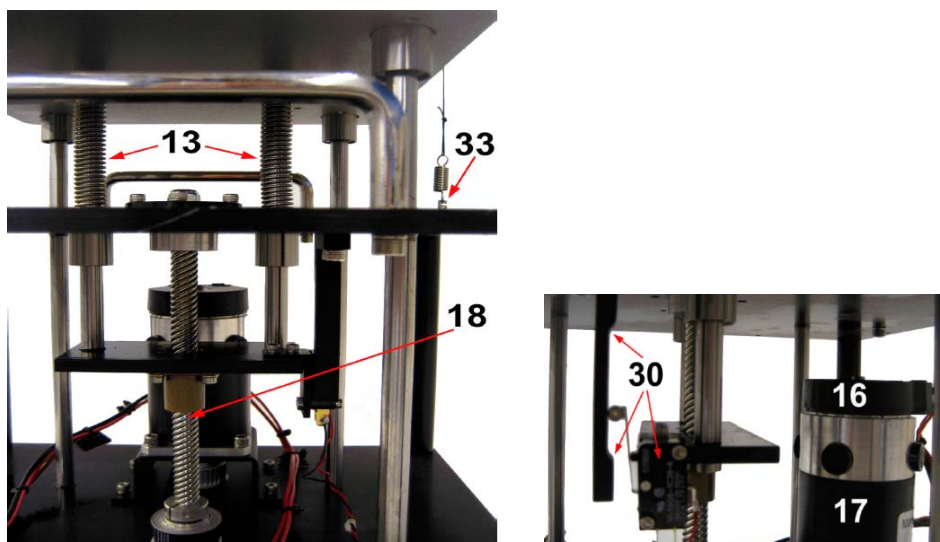
2.1. Model układu aktywnego zawieszenia

Zdjęcie całości laboratoryjnego modelu aktywnego zawieszenia oraz zdjęcia części modelu z zaznaczeniem poszczególnych komponentów są przedstawione na Rys. 2.2 Rys. 2.3. Układ zawiera trzy płyty metalowe mogące poruszać się w pionie. Płyta dolna (5, szara,) reprezentuje poziom drogi i jest napędzana poprzez przekładnię śrubową (18) umieszczonym pod nią silnikiem DC (17) z enkoderem (16) umożliwiającym pomiar przesunięcia płyty. Płyta środkowa (3, czerwona) reprezentuje masę koła, a płyta górna (1, niebieska) obciążona mosiężnym krążkiem – masę nadwozia z ładunkiem. Płyta środkowa jest elastycznie sprzęgnięta z płytami górną i dolną za pomocą par sprężyn (7 i 9) i par łożysk liniowych (10) pracujących na czterech pionowych prętach utrzymujących całą konstrukcję. Reprezentują one sprężystość i tłumienie zawieszenia oraz sprężystość i tłumienie opony w kontakcie z drogą. Pomiedzy płytą górną i środkową zamontowany jest drugi silnik DC (15) – siłownik zawieszenia, który poprzez linki na wałku napędowym może wytwarzać pionową siłę umożliwiającą aktywne tłumienie drgań płyt na końcach zawieszenia, w szczególności drgań górnej masy. Enkoder (4) tego silnika umożliwia pomiar ugięcia zawieszenia (odległości między płytą górną i środkową). Do płyty górnej przymocowany jest trzeci enkoder (34) do pomiaru przesunięcia płyty górnej (względem podstawy układu) oraz akcelerometr (21) do pomiaru pionowego przyspieszenia płyty. Bardziej szczegółowy opis elementów modelu znajduje się w Tabela 1.

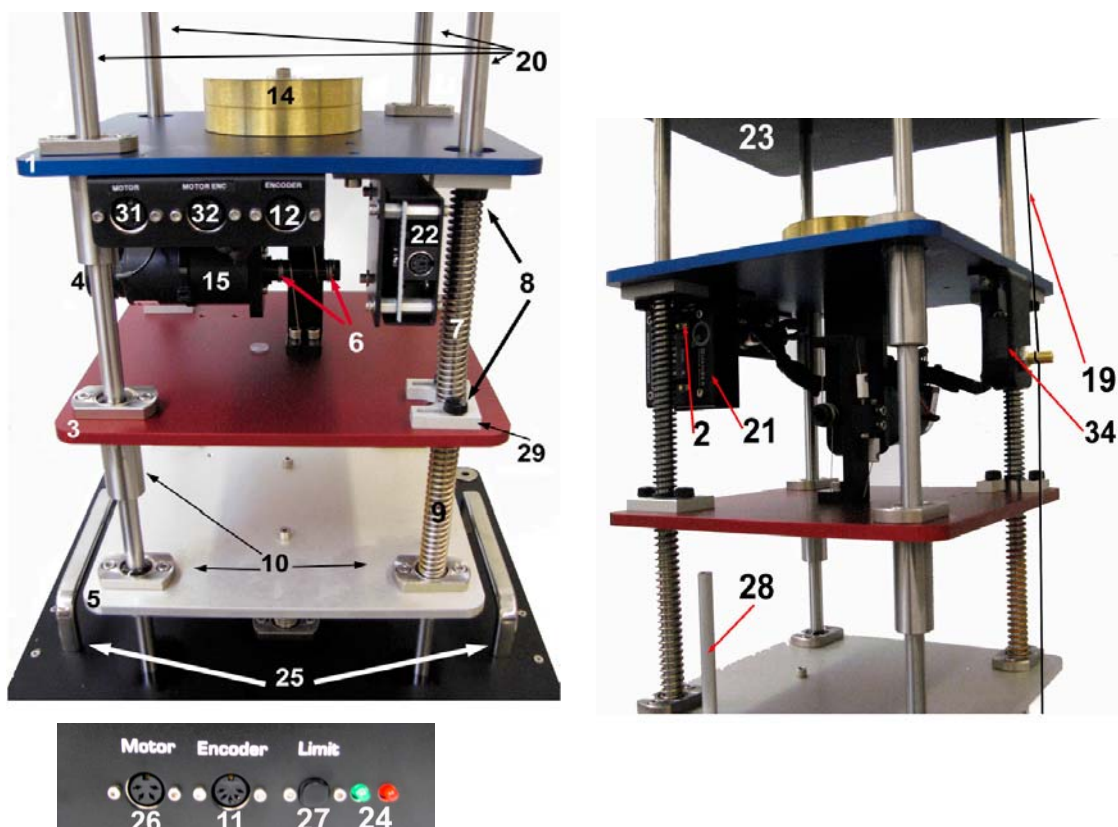


Rys. 2.1. Model układu aktywnego zawieszenia firmy Quanser – widok ogólny

Parametry mechaniczne elementów modelu aktywnego zawieszenia oraz rozdzielczości enkoderów i maksymalna wielkość siły liniowej wytwarzanej przez silnik aktywnego zawieszenia są podane w Tabela 2.



Rys. 2.2. Układ aktywnego zawieszenia – widok części dolnej (sterowanie płyty reprezentującej poziom drogi). Opis w Tabeli 1



Rys. 2.3. Układ aktywnego zawieszenia – widok z tyłu (ze złączami) i z boku. Opis w Tabeli 1

Tabela 1. Opis elementów składowych układu aktywnego zawieszenia firmy Quanser

Nr	Opis	Nr	Opis
1	Płyta górna (niebieska, reprezentuje masę nadwozia)	18	Śruba pociągowa płyty dolnej
2	Potencjometr wzmacniacza akcelerometru	19	Linka enkodera płyty górnej
3	Płyta środkowa (czerwona, reprezentuje masę koła)	20	Wałki ze stali nierdzewnej
4	Enkoder silnika aktywnego zawieszenia	21	Akcelerometr (mierzy przyspieszenie

			płyty reprezentującej nadwozie)
5	Płyta dolna (biała, reprezentuje poziom drogi)	22	Złącze akcelerometru płyty górnej
6	Linka wałka napędowego silnika zawieszenia	23	Pokrywa górna modelu
7	Dwie regulowane sprężyny zawieszenia (czarne)	24	Wskaźniki krańcowego przełącznika bezpieczeństwa
8	Śruby mocowania sprężyn	25	Uchwyty do przenoszenia modelu
9	Dwie regulowane sprężyny reprezentujące sprężystość opony (pomarańczowe)	26	Złącze silnika płyty dolnej
10	Bloki łożysk liniowych (z tarciami)	27	Przycisk przełącznika krańcowego
11	Złącze enkodera płyty dolnej (poziomu drogi)	28	Pręt zabezpieczający
12	Złącze enkodera płyty górnej (poziomu nadwozia)	29	Ruchome uchwyty mocujące sprężyn
13	Sprężyny odciążenia płyty dolnej	30	Przełącznik krańcowy bezpieczeństwa
14	Masa użyteczna - obciążenie (mosiądz)	31	Złącze silnika zawieszenia
15	Silnik DC aktywnego zawieszenia	32	Złącze enkodera silnika zawieszenia (kompresji zawieszenia)
16	Enkoder płyty dolnej	33	Kotwica linki enkodera
17	Silnik DC płyty dolnej (do sterowania poziomem drogi)	34	Enkoder płyty górnej

Tabela 2. Parametry układu aktywnego zawieszenia

Symbol	Opis	Wartość	Jednostka
M_s	Masa całkowita płyty górnej (niebieskiej) z dołączonym osprzętem	2.45	kg
M_u	Masa całkowita płyty środkowej (czerwonej) z dołączonym osprzętem	1.0	kg
K_s	Współczynnik sprężystości liniowej biernej zawieszenia - 2 sprężyny o długości 0.128m, czarne	980	N/m
K_u	Współczynnik sprężystości liniowej opony - 2 sprężyny o długości 0.115m, pomarańczowe	2500	N/m
B_s	Współczynnik tłumienia zawieszenia (tarcie lepkie)	7.5	Ns/m
B_u	Współczynnik tłumienia opony (tarcie lepkie)	5.0	Ns/m
k_t	Stała momentu silnika zawieszenia	0.115	Nm/A
	Efektywna rozdzielczość liniowa enkodera zawieszenia (enkoder 4000 impulsów/obrót w trybie kwadraturowym)	9.42	$\mu\text{m}/\text{imp}$
	Efektywna rozdzielczość liniowa enkodera płyty dolnej (szarej, enkoder 4096 impulsów/obrót w trybie kwadraturowym)	2.19	$\mu\text{m}/\text{imp}$
	Efektywna rozdzielczość liniowa enkodera płyty górnej (niebieskiej, enkoder 4096 impulsów/obrót w trybie kwadraturowym)	4.87	$\mu\text{m}/\text{imp}$
	Zakres ruchu (skok) zawieszenia	38	mm
	Zakres ruchu płyty środkowej (czerwonej)	30	mm
	Zakres ruchu płyty dolnej (białej)	36	mm
F_{cmax}	Maksymalna siła wytwarzana przez silnik zawieszenia	98	N

2.2. Elementy układu sterowania

Schemat połączeń układu sterowania aktywnym zawieszeniem i poziomem symulowanej drogi jest przedstawiony na Rys. 2.4. Algorytm regulacji modelu aktywnego zawieszenia w czasie rzeczywistym jest zaimplementowany na komputerze PC wyposażonym w środowisko

Matlab/Simulink, oprogramowanie QUARC firmy Quanser, umożliwiające szybkie prototypowanie układów do sterowania w czasie rzeczywistym, oraz kartę pomiarowo-sterującą (DAC – *Data Acquisition and Control*) QPID umożliwiającą sprzężenie komputera z obiektem (sterownik karty jest instalowany z oprogramowaniem QUARC).

Algorytm regulacji tworzy się w formie modelu (schematu blokowego) Simulinka. Oprogramowanie QUARC jest zintegrowane z Simulinkiem i dodaje do menu Simulinka własną zakładkę umożliwiającą kontrolowanie budowania modelu czasu rzeczywistego RT (*Real-Time*) oraz bibliotekę bloków do obsługi kanałów wejścia-wyjścia kart DAC (np. przetworników analogowo-cyfrowych ADC i cyfrowo-analogowych DAC) i innych funkcji wykorzystywanych do sterowania w czasie rzeczywistym oraz. Zarówno bloki QUARCa jak i prawie wszystkie inne bloki Simulinka mają reprezentacje w C. Dzięki temu translator Simulink Coder może przetworzyć model Simulinka na kod w języku C przeznaczony do implementacji w czasie rzeczywistym. Do skompilowania kodu C niezbędne jest zainstalowanie na komputerze PC kompilatora Microsoft Visual C++ 2010. QUARC dostarcza API potrzebne do wygenerowania kodu modelu przeznaczonego dla konkretnej platformy (w naszym przypadku Windows) oraz *engine* umożliwiający działanie skompilowanego modelu w czasie rzeczywistym i wymianę danych z wyjściowym schematem blokowym Simulinka. Komunikacja ze schematem blokowym umożliwia prezentację *online* efektów sterowania, np. na wykresach, oraz przekazywanie do modelu RT parametrów sterujących.

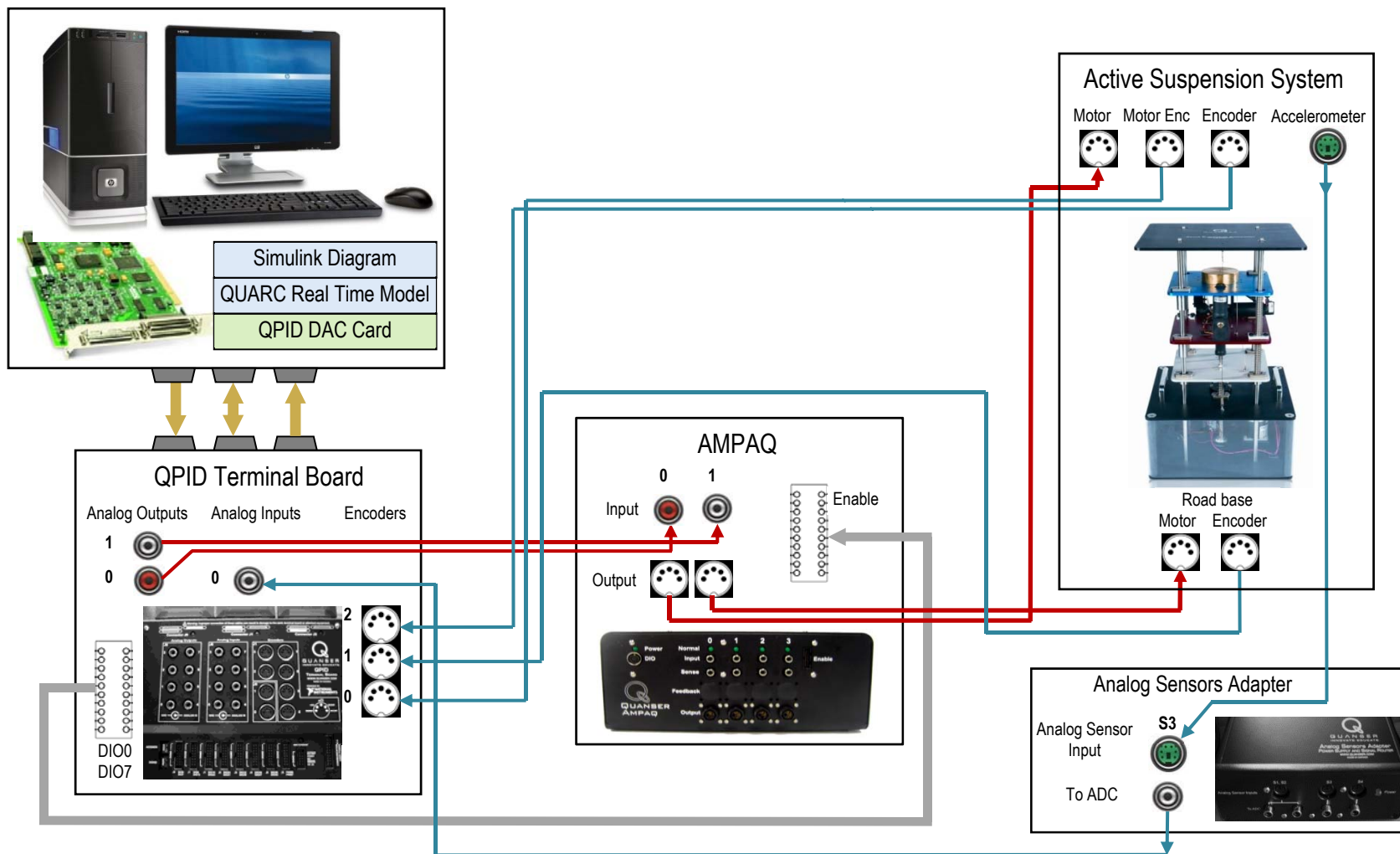
Karta QPID (Rys. 2.5) jest zaawansowaną wielokanałową kartą DAC instalowaną w komputerze PC na złączu PCI i obsługiwaną w czasie rzeczywistym przez modele QUARC. Karta zawiera 8 14-bitowych przetworników ADC z jednoczesnym próbkowaniem, 8 12-bitowych przetworników DAC (zakres napięciowy wejść/wyjść analogowych ± 10 V, częstotliwość przetwarzania do 350 kHz), 8 konfigurowanych kanałów wyjść PWM z jednoczesnym uaktualnianiem, 8 konfigurowanych wejść enkoderów kwadraturowych z możliwością dekodowania 4X, 32 linie wejść-wyjść binarnych, 24-bitowy programowalny licznik, zegar watchdog oraz interfejs SPI. Poprzez 3 złącza na śledziu kartę łączy się z modułem terminala QPID Terminal Board umożliwiającym wygodne podłączenie kabli z sygnałami wejściowymi z czujników i sygnałami wyjściowymi do elementów wykonawczych. Wejścia i wyjścia analogowe łączy się za pomocą kabli ekranowanych z wtykami RCA (cinch), sygnały z enkoderów za pomocą kabli ekranowanych z wtykami DIN-5. Sygnał z akcelerometru przed wprowadzeniem do przetwornika ADC przechodzi przez moduł Analog Sensors Adapter (połączenie kablem ze złączami mini DIN-5), który dostarcza czujnikom napięcie zasilania.

Wyjściowe sygnały analogowe z karty QPID są sygnałami sterującymi dla silników - elementów wykonawczych modelu aktywnego zawieszenia, ale wymagają przetworzenia na sygnały impulsowe PWM (o częstotliwości od kilku do kilkudziesięciu kHz) i wzmocnienia. Moduł Quanser AMPAQ (Rys. 2.6) jest liniowym wzmacniaczem PWM prądu służącym do zasilania dwóch silników DC układu aktywnego zawieszenia. Elektryczne parametry wzmacniacza modułu są podane w Tabeli 3. Wzmacniacz jest sterowany sygnałami wyjściowymi z karty DAC podłączonymi do jego wejść *Input*. Sygnały na wyjściach *Sense* reprezentują prądy mierzone w dołączonych silnikach. Na złącze wejściowe *Enable* podaje się z komputera PC poprzez terminal QPID (przewód wstążkowy) sygnały cyfrowe włączające/wyłączające określone wyjścia prądowe *Output* wzmacniacza, z których sterowane są silniki. Aktywność każdego z wyjść sterujących silnikami (stan normalnej pracy) jest sygnalizowana włączeniem odpowiedniego wskaźnika LED na panelu wzmacniacza.

Schemat blokowy układu sterowania zawieszeniem jest przedstawiony na

Rys. 2.7. Na podstawie sygnałów sprzężenia zwrotnego z czujników: enkodera zawieszenia i akcelerometru, regulator generuje sygnał sterujący dla elementów wykonawczych: wzmacniacza PWM i silnika zawieszenia.

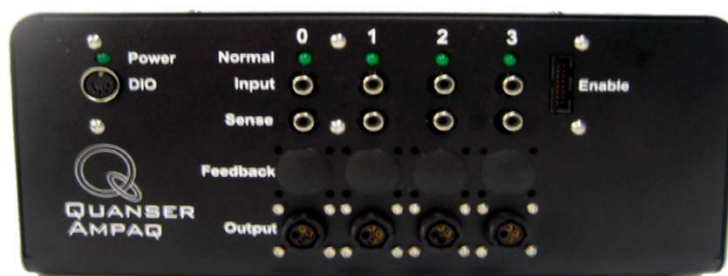
Uwaga: Z punktu widzenia opisu teoretycznego projektowana regulacja jest regulacją ciągłą, ale praktycznie jest ona realizowana jako regulacja cyfrowa dyskretna w czasie. W wykorzystywanych modelach Simulinka przyjęto jednak dużą częstotliwość przetwarzania kanałów analogowych ($f_s=1000$ Hz) w stosunku do częstotliwości drgań własnych mechanicznych elementów układu zawieszenia, co sprawia, że zastosowana regulacja cyfrowa jest bardzo dobrym przybliżeniem zaprojektowanej regulacji ciągłej i zapewnia porównywalną jakość sterowania. Rozwiązanie takie jest nazywane dyskretną emulacją regulacji analogowej.



Rys. 2.4. Schemat połączeń układu sterowania aktywnym zawieszeniem i poziomem drogi.
 Linie niebieskie – sygnały mierzone (enkodery ugięciai zawieszenia, poziomu nadwozia i poziomu drogi, akcelerometr nadwozia),
 linie czerwone – sygnały sterujące (serwonapędami aktywnego zawieszenia i poziomu drogi)



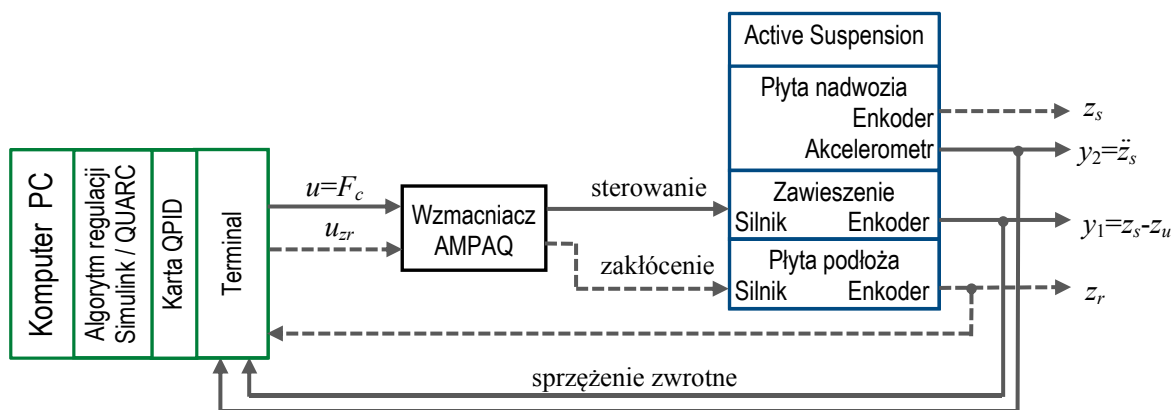
Rys. 2.5. Karta pomiarowo-sterująca QPID i panel łączeniowy karty - QPID Terminal Board



Rys. 2.6. Panel czołowy wzmacniacza PWM prądu AMPAQ

Tabela 3. Parametry elektryczne modułu AMPAQ

Symbol	Opis	Wartość	Jednostka
	Zakres sygnałów napięciowych na wejściu Enable	0 do 5	V
V_{A_RNG}	Maksymalny zakres napięcia wejściowego Input	± 10	V
V_{A_SUP}	Wyjściowe napięcie zasilania Output	27	V
K_A	Wzmocnienie prądowo-napięciowe	0.5	A/V
I_{MAX}	Szczytowy prąd wyjściowy	7	A
I_{MAX_CONT}	Maksymalny ciągły prąd wyjściowy Output	2.15	A
B	Wyjściowe pasmo przenoszenia wzmacniacza	500	Hz
S_{AMP_SEN}	Czułość czujnika prądu (dla kanałów 0, 1 lub 2; wewnątrz modułu)	2.0	A/V



Rys. 2.7. Schemat blokowy układu sterowania zawieszeniem odpowiadający schematowi połączeń na Rys. 2.4. Linie przerywane pokazują pętlę sprzężenia zwrotnego pomocniczego układu generowania zakłócenia (zadanego poziomu drogi) dla głównego układu regulacji

3. Program realizacji ćwiczenia

3.1. Zadania wstępne

- 1) Na podstawie transformat Laplace'a równań (1.1) wyprowadzić transmitancje zakłócenia $G_{sr}(s) = Z_s(s)/Z_r(s)$ (od poziomu drogi z_r do przesunięcia z_s masy nadwozia) oraz $G_{ur}(s) = Z_u(s)/Z_r(s)$ (od poziomu drogi z_r do przesunięcia z_u masy koła).

Sprawdzić, czy otrzymane transmitancje mają postać:

$$G_{sr}(s) = \frac{L_{sr}(s)}{M(s)}, \text{ gdzie: } L_{sr}(s) = B_s B_u s^2 + (K_s B_u + K_u B_s) s + K_s K_u,$$


$$M(s) = M_s M_u s^4 + (M_s B_s + M_s B_u + M_u B_s) s^3 + (M_s K_s + M_s K_u + M_u K_s + B_s B_u) s^2 + (K_s B_u + K_u B_s) s + K_s K_u$$

$$\text{oraz } G_{ur}(s) = \frac{L_{ur}(s)}{M(s)}, \text{ gdzie: } L_{ur}(s) = (B_u s + K_u)(M_s s^2 + B_s s + K_s)$$

- Jakie są wzmacnienia DC ($G(s=j\omega)$ przy $\omega \rightarrow 0$) wyznaczonych transmitancji?

- 2) Uruchomić Matlab. Otworzyć w edytorze nowy plik skryptowy (m-plik) i utworzyć *symboliczny* model stanu obiektu zgodnie z równaniami:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_u} & \frac{B_s}{M_u} & \frac{k_u}{M_u} & -\frac{B_s + B_u}{M_u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{B_u}{M_u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_u} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

wykorzystując możliwości obliczeń symbolicznych (skopiować linie kodu zamieszczone poniżej do edytora, zapisać skrypt w folderze roboczym i uruchomić go przyciskiem  (Save and Run); wyniki są wyświetlane w oknie komend Matlab; kolejne linie z dalszych podpunktów można dodawać na końcu skryptu).

```
clear, clc
syms ks ku ms mu bs bu Fc
A = [0 1 0 -1;
     -ks/ms -bs/ms 0 bs/ms;
     0 0 0 1;
     ks/mu bs/mu -ku/mu -(bs+bu)/mu]
Bz = [0; 0; -1; bu/mu]; % disturbance input #1 (zrdot) matrix
B = [0 ; 1/ms ; 0 ; -1/mu]; % control input #2 (Fc) matrix
B = [Bz, B] % expanded input matrix with disturbance
C = [ 1 0 0 0
     -ks/ms -bs/ms 0 bs/ms] % measured/controlled output matrix
Dz = [0; 0];
D = [0; 1/ms]; % control input #2 feedthrough
D = [Dz, D] % expanded feedthrough matrix
```

- 3) Wyznaczyć wielomian charakterystyczny macierzy stanu \mathbf{A} obiektu:

```
syms s I
I = eye(4)
charpoly = det(s*I - A);
charpoly = collect(charpoly, s)
```

- Porównać otrzymany wielomian charakterystyczny z wielomianem $M(s)$ mianownika wyznaczonych transmitancji $G_{sr}(s)$ i $G_{ur}(s)$.

- 4) Na podstawie modelu zmiennych stanu wyznaczyć macierz transmitancji (zakłócenia i wymuszenia) z poszczególnych wejść do poszczególnych wyjść:

```
Gtf = C * inv(s*I - A) * B + D;
```

```
Gtf = simple(Gtf);
disp('Disturbance TF (Zs-Zu)/Zrdot')
Gtf(1,1)
disp('Disturbance TF Zsddot/Zrdot')
Gtf(2,1)
disp('Control TF (Zs-Zu)/Fc')
Gtf(1,2)
disp('Control TF Zsddot/Fc')
Gtf(2,2)
```

- Porównać wielomiany mianowników otrzymanych transmitancji z wielomianem charakterystycznym obiektu i skomentować wynik obserwacji.

3.2. Analiza układu otwartego

A. Symulacje komputerowe

- 1) Wyczyścić pamięć roboczą Matlab (clear, clc) i otworzyć plik skryptowy SETUP_ASP_PARAMETERS.m. Uruchomienie skryptu inicjalizuje parametry modelu symulacyjnego i zmienne użytkownika. Zapoznać się z instrukcjami skryptu i wywoływaną przez skrypt funkcją ASP_ABCD_MATRICES(CONTROLLER_TYPE). Sprawdzić wartości parametrów fizycznych i definicje macierzy modelu A, B, C, D. Uaktywnić linię skryptu CONTROLLER_TYPE = 'Open_Loop' i uruchomić skrypt.

```
CONTROLLER_TYPE='Open_Loop'; % Open-loop system
%CONTROLLER_TYPE='LQR_GUI_Tuning'; % GUI for interactive LQR tuning
%CONTROLLER_TYPE='LQG_GUI_Tuning_with_Full_Obs';%GUI interactive LQG tuning
...
```

- 2) Utworzyć model zmiennych stanu obiektu (funkcja ss – state-space) i zdefiniować nazwy zmiennych:

```
AS = ss(A, B, C, D) % Note: AS(output, input)!
AS.StateName = {'zs-zu'; 'zsddot'; 'zu-zr'; 'zudot'};
AS.InputName = {'velocity zrdot'; 'force Fc'};
AS.OutputName = {'defl. zs-zu'; 'acceler. zsddot'};
```

- Uwaga: Macierze **B** i **D** w definicji modelu AS są macierzami rozszerzonymi obejmującymi wejście zakłócenia i sterujące, równymi odpowiednio [**B_z B**] i [**D_z D**] według oznaczeń we

$$\text{wzorach } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_u} & \frac{B_s}{M_u} & \frac{k_u}{M_u} & -\frac{B_s + B_u}{M_u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{B_u}{M_u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_u} \end{bmatrix}$$

(1.3) (por. wzór (D.1) w Dodatku).

- 3) Wyznaczyć model transmitancyjny $G_o(s)$ układu otwartego (funkcja tf – transfer function, 2 wejścia – 2 wyjścia):

```
AStf = tf(AS)
```

- Porównać mianowniki transmitancji. Zwrócić uwagę na bardzo małe wartości wyrazów wolnych w wielomianach liczników dwóch pierwszych transmitancji (z wejścia zakłócenia). Jakie jest wzmocnienie DC tych transmitancji i jaki mają one w praktyce charakter?
- Porównać transmitancję zakłóceniovą $G(2,1)$ od \dot{z}_r (czyli $sZ_r(s)$, wejście 1) do przyspieszenia \ddot{z}_s (czyli $s^2Z_s(s)$, wyjście 2) z wyznaczoną w pkt. 3.1 transmitancją $G_{sr}(s) = Z_s(s)/Z_r(s)$. Jaki jest między nimi związek teoretyczny?

- 4) Wyznaczyć położenia biegunów i zer układu otwartego (obiektu):

```
[p,z]= pzmap(AS) % pole-zero locations
```

```
pzmap(AS)          % pole-zer-map
axis([-20 5 -80 80])
```

- Najężdżając na wykresie wskaźnikiem myszki na krzyżyki 'x' oznaczające bieguny odczytać parametry (Frequency, Damping), tj. pulsację drgań nietłumionych i względny współczynnik tłumienia (ω_n, ζ), obu par biegunów układu. Z jakim członem podstawowym jest związana każda para biegunów? Związek współrzędnych pary biegunów $-\sigma \pm j\omega_d$ (współczynnika tłumienia/obwiedni i pulsacji drgań) z parametrami (ω_n, ζ) jest pokazany na Rys. 3.1.
- Jak odczytane pulsacje ω_n par biegunów mają się do pulsacji drgań nietłumionych osobnych układów masa-sprężyna $\omega_{ns} = \sqrt{K_s / M_s}$, $\omega_{nu} = \sqrt{K_u / M_u}$?

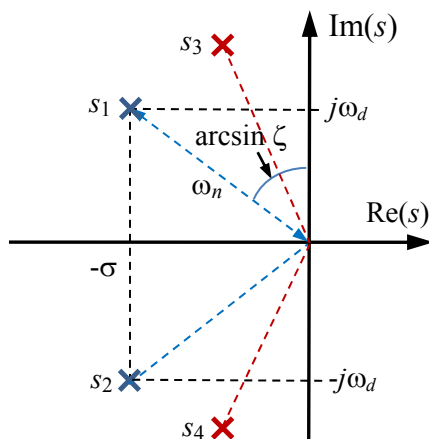
5) Wyznaczyć logarytmiczne charakterystyki amplitudowe Bodego układu:

```
bodemag(AS, logspace(0,3,200)), grid
```

- Określić pulsacje ω_r dwóch pików rezonansowych na wykresach. Z którą parą biegunów oscylacyjnych jest związany pierwszy, a z którą drugi pik? Na podstawie wyznaczonych wartości (ω_n, ζ) sprawdzić, czy pulsacje rezonansowe na wykresach są zgodne ze wzorem $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$.

6) Przeprowadzić test sterowalności i obserwowalności modelu obiektu:

```
Crank = rank(ctrb(AS(:,2))) % from input #2 only
Orank = rank(obsv(AS))
```



Rys. 3.1. Związek współrzędnych pary biegunów $-\sigma \pm j\omega_d$ z parametrami (ω_n, ζ)

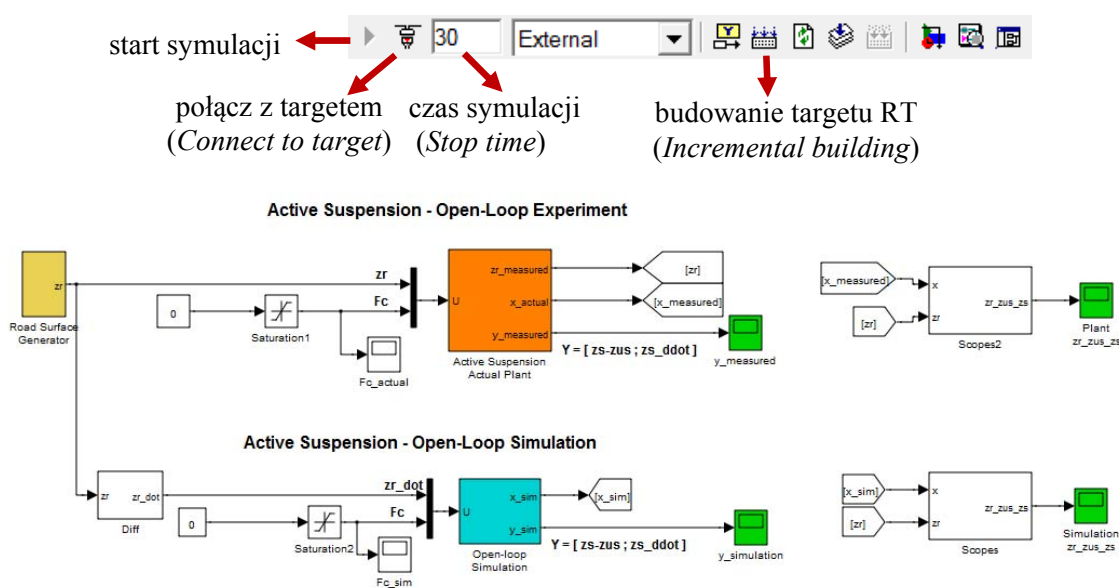
$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d, \quad \text{gdzie: } \sigma = \zeta\omega_n, \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

- Co oznaczają otrzymane wartości rzędu (*rank*) macierzy sterowalności i obserwowalności? Dlaczego w macierzy sterowalności uwzględnia się tylko wejście #2 modelu?

B. Eksperymenty w układzie Active Suspension

- 1) Otworzyć model symulacyjny Simulinka o nazwie AS_Open_Loop.mdl (Rys. 3.2). Zapoznać się z poszczególnymi subsystemami i blokami schematu. Np. blok symulacji modelu Open-Loop Simulation zawiera blok modelu zmiennych stanu z macierzami **A, B, C, D** i zadanymi zerowymi warunkami początkowymi. Macierze równania wyjścia **C, D** są rozszerzone, ponieważ symulowany model przekazuje na wyjście do obserwowania również wszystkie 4 zmienne stanu i dlatego ma 6 wyjść.
 - W subsystemie Active Suspension Actual Plant, służącym do sprzęgania program z obiektem fizycznym (generowania sterowania i zakłócenia oraz odbierania pomiarów z czujników) znajdują się bloki z biblioteki QUARC, m.in. blok HIL Initialize (*Hardware In-the-Loop*), który umożliwia działanie symulacji w czasie rzeczywistym i obsługę karty DAC (w tym przypadku karty QPID) oraz blok HIL Read Encoder Timebase, który umożliwia prowadzenie symulacji/sterowania z dużą częstotliwością próbkowania (np. 10 kHz). Częstotliwość próbkowania w ćwiczeniu jest równa 1000 Hz.

- Subsystem **Road Surface Generator** wytwarza zadany przebieg sygnału poziomu drogi, tj. zakłócenia. Umożliwia wybór przebiegu prostokątnego (wygładzonego funkcją sigmoidalną) lub sinusoidalnego o liniowo zwiększającej się częstotliwości (**All Harmonics Generator**).
- 2) Przed rozpoczęciem eksperymentu z modelem aktywnego ustawić położenie zerowe płyty dolnej (poziomu drogi). Końcówka zabezpieczającego przełącznika krańcowego widoczna z przodu stanowiska przez przezroczystą osłonę dolnej części (30 na Rys. 2.2) powinna znajdować się w środku wycięcia na belce, wzdłuż której porusza rolka przełącznika. Po ustawieniu płyty dolnej wcisnąć przycisk **Limit** (27 na Rys. 2.3) z tyłu podstawy stanowiska. Właściwe ustalenie położenia zerowego jest sygnalizowane włączeniem się zielonej diody. Brak tej sygnalizacji blokuje włączenie stanowiska.
 - **Uwaga: Sprawdzić, czy płyty fizycznego modelu aktywnego zawieszenia mogą się swobodnie poruszać w pionie.**
 - 3) Ustawić czas symulacji (*Stop time*) równy 30 s (w polu na belce modelu lub poprzez Ctrl+E) i tryb symulacji *External*.



Rys. 3.2. Model Simulinka do przeprowadzania eksperymentu z aktywnym zawieszeniem pracującym w układzie otwartym (tor górny) oraz symulacji układu otwartego (tor dolny)

- 4) W subsystemie **Road Surface Generator** ustawić **Road Switch** na **All Harmonics Generator** (dwukrotne kliknięcie powoduje przełączenie przełącznika). W bloku **Repeating Sequence** powinno być **Time values**=[0 30 30.1] i **Output values**=[1 10 1]. Oznacza to generowanie sygnału sinusoidalnego o częstotliwości zmieniającej się liniowo w czasie od $f_0=1$ Hz na początku ($t_0=0$) do $f_k=10$ Hz na końcu symulacji ($t_k=30$ s).
- 5) Otworzyć okno oscyloskopu **Plant zr_zus_zs** (dwukrotnym kliknięciem na bloku oscyloskopu). W czasie symulacji pierwszy przebieg (żółty) pokazuje zmiany poziomu drogi zr (zakłócenie), drugi (różowy) – przesunięcie płyty czerwonej z_{us} (koła), trzeci (niebieski) – przesunięcie płyty niebieskiej z_s (nadwozia). Otworzyć okno oscyloskopu wyjść mierzonych $y_measured$. Tutaj pierwszy przebieg (żółty) pokazuje ugięcie zawieszenia $z_s - z_{us}$, drugi (różowy) – przyspieszenie z_{sddot} działające na nadwozie.
- 6) Przeprowadzić proces budowania (kompilowania i linkowania) modelu (przycisk *Incremental Building* na belce (nie przebudowuje bibliotek) lub opcja menu **QUARC | Build** lub Ctrl+B).
- 7) Połączyć się ze zbudowanym targetem czasu rzeczywistego (przycisk *Connect to target* lub Ctrl+T) i uruchomić symulację (przycisk *Start* lub Ctrl+E). Obserwować zachowanie się modelu aktywnego zawieszenia i przebiegi.

- **Uwaga:** Przebiegi z bloków oscyloskopów są zapisywane w pamięci Workspace Matlab w zmiennych strukturalnych `plant_zr_zus_zs`, `y_meas`, `sim_zr_zus_zs`, `y_sim`. Te same wykresy można otrzymać w oknach wykresów korzystając z m-plików skryptowych (które powinny znajdować się w folderze roboczym):

```
plot_plant_zr_zus_zs    % plot_sim_zr_zus_zs dla symulacji
plot_y_meas            % plot_y_sim dla symulacji
```

- Zaobserwować (w oknie oscyloskopu `Plant zr_zus_zs`) występowanie zjawiska rezonansu płyty reprezentującej nadwozie i płyty reprezentującej koło, tzn. zwiększenie amplitudy drgań przy pewnych częstotliwościach drgań płyty poziomej drogi (amplituda drgań tej płyty jest stała).
- Ustalić doświadczalną pulsację rezonansową ω_r , korzystając z proporcjonalnej zależności częstotliwości drgań od czasu, oraz wzmocnienie M_r amplitudy drgań w stosunku do amplitudy dla małej częstotliwości, czyli wysokość piku rezonansowego, dla płyty czerwonej, jak na Rys. 3.3, korzystając z zależności:

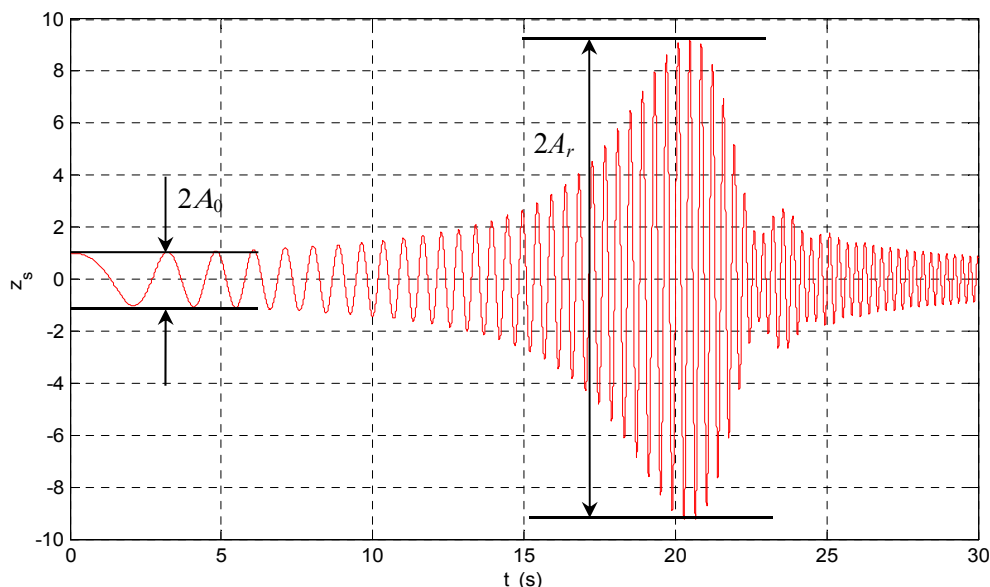
$$M_r = \frac{A_r}{A_0} = \frac{1}{2\zeta^2}, \quad \omega_r = 2\pi f_r = 2\pi \left(f_0 + \frac{\Delta f}{\Delta t} t_r \right) \text{ (rad/s)},$$

gdzie: $\Delta f = f_k - f_0$, $\Delta t = t_k - 0 = t_k$ (3.1)

- Na podstawie parametrów rezonansu wyznaczyć parametry (ω_n , ζ) pary biegunów związanych z drganiami koła, a następnie, posługując się zależnościami z Rys. 3.1, ich położenie na płaszczyźnie zespolonej.

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2M_r}}, \quad \omega_n = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}$$
(3.2)

- 8) W subsystemie `Road Surface Generator | All Harmonics Generator` ustawić w bloku `Repeating Sequence Output values=[1 6 1]`, `Time values=[0 30 30.1]` (generowanie sygnału sinusoidalnego o częstotliwości zmieniającej się liniowo w czasie od $f_0=1$ Hz na początku do $f_k=6$ Hz na końcu symulacji, $t_k=30$ s). W bloku `Slider Gain Amplitude` zwiększyć amplitudę drgań do 0.004.
- Powtórzyć kroki 5-7 w celu zaobserwowania wyraźniejszego rezonansu płyty niebieskiej (nadwozia), określenia częstotliwości jej rezonansu i wzmocnienia rezonansowego oraz wyznaczenia położenia drugiej pary biegunów układu otwartego związanych z drganiami nadwozia.
 - Która część układu ma mniejszą częstotliwość rezonansową i mniejszą częstotliwość drgań własnych (nietłumionych)? Wyjaśnić dlaczego.

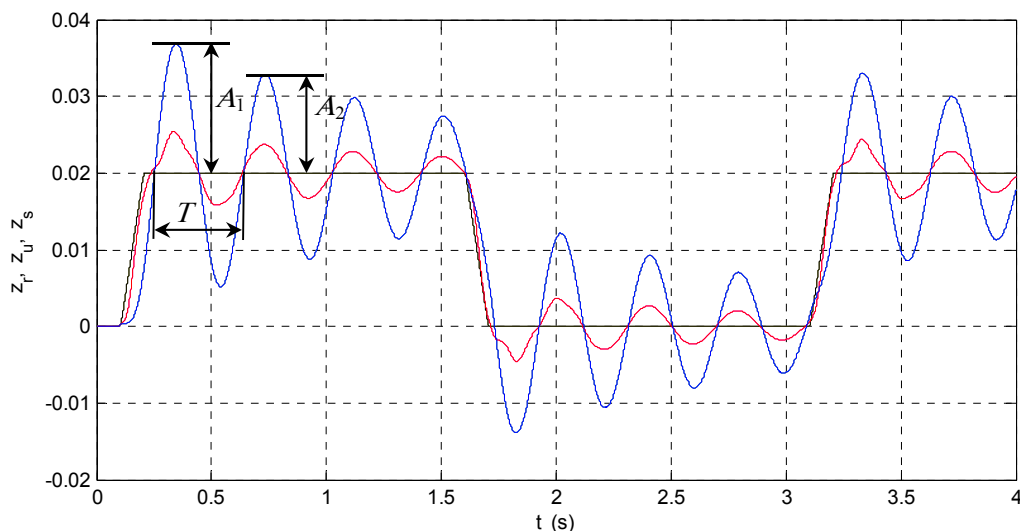


Rys. 3.3. Doświadczalne określenie wzmacnienia rezonansowego $M_r = A_r/A_0$

- 9) Przejść do bloku Road Surface Generator i przestawić przełącznik Road Switch na Pulse Generator. Blok ten generuje skokowe impulsy o okresie 3 sekund i amplitudzie 0.02 (parametry: Amplitude=0.02, Period=3 s, Pulse Width=50 %). Stromość zboczy tych prostokątnych impulsów zadanego poziomu drogi jest ograniczana przez wygładzanie w bloku Continuous Sigmoid, co zmniejsza przeciążenia silnika sterującego płytą dolną i umożliwia mu pracę w zakresie liniowym. Przeprowadzić jak poprzednio budowanie modelu RT, uruchomić symulację i zaobserwować przebiegi sygnałów na oscyloskopach.
- Na podstawie przebiegów z oscyloskopu Plant zr_ zus_zs (Rys. 3.4) wyznaczyć okres T i pulsację drgań $\omega = \omega_d = 2\pi/T$ (rad/s) oraz współczynnik ich tłumienia σ , korzystając z zależności:

$$\sigma = \frac{1}{T} \ln \frac{A_1}{A_2}$$

- Którą parę biegunów układu reprezentują widoczne dominujące oscylacje? W którym przebiegu (chodzi o przesunięcia zus koła i zs nadwozia) widać zawartość obu składowych częstotliwościowych, a w którym widać tylko jedną składową? Jak można to wyjaśnić?
- Przedyskutować dokładność modelu matematycznego porównując przebiegi symulowane z rzeczywistymi, mierzonymi w układzie fizycznym w punktach 7-9, oraz wynikające z modelu położenia biegunów z wyznaczonymi doświadczalnie na podstawie przebiegów.



Rys. 3.4. Oscylacyjne odpowiedzi układu na prostokątny przebieg wejścia z_r .

3.3. Regulacja LQR

Do zaprojektowania algorytmu aktywnego tłumienia drgań w układzie zawieszenia zastosowana zostanie metoda LQR (patrz: Dodatek). Metoda ta uwzględnia wielkości określające jakość regulacji oraz ograniczenia elementu wykonawczego w kwadratowej funkcji kosztu, która jest optymalizowana. Daje to w wyniku macierz \mathbf{K} optymalnego sprzężenia stanu do wejścia sterowania \mathbf{u} przy założeniu, że wszystkie stany \mathbf{x} są dostępne (mierzone).

Sterowalność układu z wejścia sterującego $u=F_c$ została sprawdzona i potwierdzona w pkt. 3.2.

W optymalizowanej funkcji kosztu J_{LQR} ograniczymy się do przypadku diagonalnej macierzy wagowej \mathbf{Q}_x zmiennych stanu (macierz \mathbf{R} jest skalarem, bo układ ma tylko jedno wejście sterujące):

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + R_{11} u^2 \right) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} [Q_{11}(z_s - z_u)^2 + Q_{22}\dot{z}_s^2 + Q_{33}(z_u - z_r)^2 + Q_{44}\dot{z}_u^2 + R_{11}F_c^2] dt \quad (3.3)$$

Optymalne sterowanie LQR w formie pełnego sprzężenia stanu ma postać:

$$u = F_c = -\mathbf{K}_{LQR} \mathbf{x} = -[K_{11}(z_s - z_u) + K_{22}\dot{z}_s + K_{33}(z_u - z_r) + K_{44}\dot{z}_u] \quad (3.4)$$

A. Symulacje komputerowe

- 1) Wyczyścić pamięć roboczą Matlab'a i przejść do edycji pliku skryptowego SETUP_ASP_PARAMETERS.m. Uaktywnić linię skryptu CONTROLLER_TYPE = 'LQR_GUI_Tuning' i uruchomić skrypt .

```
%CONTROLLER_TYPE='Open_Loop'; % Open-loop system
CONTROLLER_TYPE='LQR_GUI_Tuning'; % GUI for interactive LQR tuning
%CONTROLLER_TYPE='LQG_GUI_Tuning_with_Full_Obs';%GUI interactive LQG tuning
...
```

- Uruchomienie skryptu re-inicjalizuje parametry modelu symulacyjnego, ustawia początkowe wzmacnienie $\mathbf{K}=[0 \ 0 \ 0 \ 0]$ i otwiera okno dialogowe do interaktywnego strojenia parametrów diagonalnych macierzy funkcji kosztu (3.3) (Rys. 3.5. Okno dialogowe GUI do interaktywnego strojenia on-line regulatora LQR i wyznaczania położenia biegunów układu zamkniętego). Procedura projektowania zakłada, że zmienne stanu są mierzone. Minimalizacja

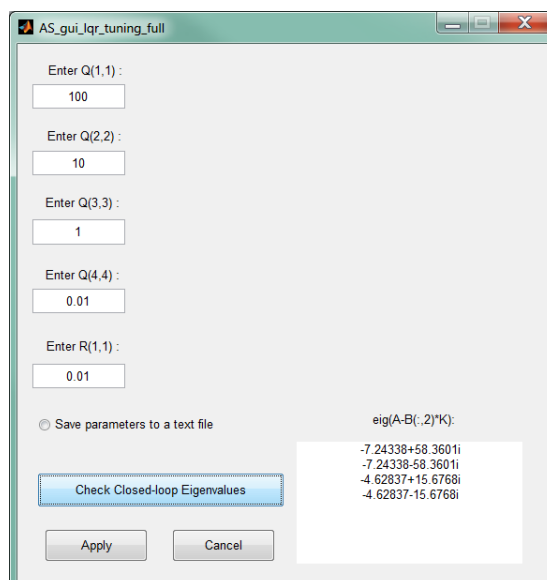
wskaźnika J_{LQR} ma na celu jak najszybsze sprowadzenie wektora stanu i sterowania do zera. Ponieważ macierze \mathbf{Q}_x i \mathbf{R} mają być nieujemnie określone należy wpisywać tylko dodatnie lub zerowe wartości współczynników. Większa wartość wagi przy danej zmiennej stanu lub sterowaniu w porównaniu z innymi wagami oznacza, że procedura LQR kładzie większy nacisk na minimalizację związanego z nią składnika funkcji J_{LQR} , co skutkuje większą wartością wzmocnienia stanu ($K_1 \div K_4$) tej zmiennej. W szczególności duża wartość R_{11} prowadzi do ograniczenia energii i amplitudy sterowania F_c .

- Procedura wyznacza wektor sprzężenia stanu \mathbf{K} , dla widocznych wartości współczynników, każdorazowo po wciśnięciu przycisku **Apply**. Jeżeli zaznaczona jest opcja **Save parameters to a text file**, to zastosowane współczynniki \mathbf{Q} i \mathbf{R} są wtedy zapisywane w pliku `lqr_tuning_logfile.txt`. Położenia biegunów układu zamkniętego, czyli wartości własnych macierzy $(\mathbf{A}-\mathbf{B}(:,2)\mathbf{K})$, gdzie $\mathbf{B}(:,2)=\mathbf{B}_u$, dla wyliczonego wektora \mathbf{K} można sprawdzić w oknie wciskając przycisk **Check Closed-loop eigenvalues**. Do obliczenia optymalnego sprzężenia \mathbf{K} wykorzystywana jest funkcja Matlab'a:

```
Q = diag([Q11 Q22 Q33 Q44]); R = R11;
```

```
K = lqr(A, B, Q, R);
```

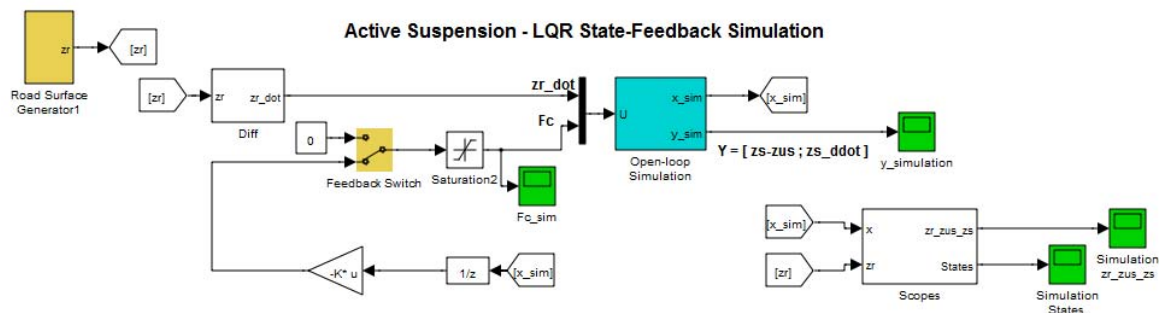
- Wartości składowych \mathbf{K} są dostępne w oknie podglądu przestrzeni roboczej **Workspace**.
- Efekt działania wyliczonego wektora sprzężenia stanu \mathbf{K} jest od razu widoczny w działaniu modelu Simulinka w czasie rzeczywistym (o ile model jest uruchomiony).



Rys. 3.5. Okno dialogowe GUI do interaktywnego strojenia on-line regulatora LQR i wyznaczania położenia biegunów układu zamkniętego

2) Otworzyć model Simulinka `AS_LQR_Sim.mdl` (Rys. 3.6). Zwrócić uwagę, że sprzężenie zwrotne dochodzi tylko do wejścia sterowania modelu obiektu.

- Ustawić przełącznik **Feedback Switch** w położenie zamykające sprzężenie zwrotne (dolne).
- W Subsystemie **Road Surface Generator** przełącznik **Road Switch** ustawić w położenie **Pulse Generator**. Sprawdzić parametry generatora impulsów ($\text{Amplitude}=0.02$, $\text{Period}=3$ s, $\text{Pulse Width}=50$ %) oraz parametry bloków **Repeating Sequence** ($\text{Output values}=[1\ 6\ 1]$, $\text{Time values}=[0\ 30\ 30.1]$) i **Amplitude Slider Gain** (0.004) w subsystemie **All Harmonics Generator**.



Rys. 3.6. Model Simulinka do symulacji modelu aktywnego zawieszenia pracującego w układzie zamkniętym z pełnym sprzężeniem stanu wyznaczonym metodą LQR

- 3) Otworzyć do obserwacji okna oscyloskopów: `zr_zus_zs` (poziomy drogi, koła i nadwozia (m)), `y` (mierzone wielkości wyjściowe: ugięcie zawieszenia $z_s - z_u$ (m) i przyspieszenie nadwozia z_{sddot} (m/s^2)) i `Fc` (siła sterowania (N)); wartość ta jest następnie przeliczana na napięcie wyjściowe przetwornika DAC w subsysemie `Control Actuator`).
 - 4) Przeprowadzić proces budowania i ładowania modelu RT (przycisk *Incremental Building* lub `Ctrl+B`). Połączyć się z modelem RT (przycisk *Connect to target* lub `Ctrl+T`) i uruchomić symulację (przycisk *Start* lub `Ctrl+E`). Obserwować zachowanie się modelu aktywnego zawieszenia i przebiegi. Pamiętać, że przed wyznaczeniem wartości **K** (naciśnięciem `Apply` w oknie dialogowym strojenia on-line regulatora LQR) sprzężenie zwrotne nie jest zamknięte.
 - 5) Przejść do okna dialogowego interaktywnego strojenia on-line regulatora LQR i dostrajać parametry sprzężenia poprzez zmianę współczynników wagowych Q_{11} do Q_{44} i R metodą prób i błędów (pamiętać o każdorazowym wciśnięciu `Apply`, co powoduje wyznaczenie nowej wartości wektora **K**). Obserwować efekty w oknach oscyloskopów.
- **Uwaga:** Ostatnie 10 s przebiegów z bloków oscyloskopów są zapisywane w pamięci Workspace Matlab w zmiennych strukturalnych `sim_zr_zus_zs`, `y_sim`, `Fc_sim`, `sim_states`. Można je otrzymać w oknach wykresów korzystając z m-plików skryptowych:

```
plot_sim_zr_zus_zs
plot_y_sim
plot_Fc_sim
plot_sim_states
```

- Celem sterowania jest wytlumienie oscylacji i zapewnienie płynnego ruchu nadwozia z możliwie małym przyspieszeniem (większy komfort jazdy) i ograniczenie ugięć zawieszenia (większa stabilność jazdy) przy możliwie małej energii sterowania. W oknie oscyloskopu `Fc` kontrolować, czy wartość sygnału sterującego nie osiąga poziomu nasycenia.
- Dążyć do osiągnięcia następujących celów regulacji: I) możliwie szybka kompensacja działania zakłócenia, dopuszczalne przeregulowania (sztywne zawieszenie), II) możliwie łagodna kompensacja zakłócenia bez przeregulowań (komfort jazdy). W obu przypadkach amplituda sterowania powinna być możliwie mała.
- Wartość Q_{11} (w stosunku do pozostałych współczynników) wpływa najbardziej na minimalizację ugięcia zawieszenia $x_1 = z_s - z_u$ i wzmocnienie K_1 sprzężenia stanu, wartość Q_{22} wpływa najbardziej na minimalizację szybkości pionowej ruchu nadwozia $x_2 = \dot{z}_s$ i wzmocnienie K_2 , wartość Q_{33} wpływa na minimalizację ugięcia opony $x_3 = z_u - z_r$ i wzmocnienie K_3 , wartość Q_{44} wpływa na minimalizację szybkości ruchu koła $x_4 = \dot{z}_u$ i wzmocnienie K_4 , natomiast wartość R_{11} wpływa na minimalizację energii (i amplitudy) sterowania F_c .
- Wywnioskować, jakie ogólne efekty (trendy) w zachowaniu się układu regulacji wywołują różne wzajemne zmiany wartości pięciu parametrów projektowych. Zarejestrować przebiegi potwierdzające wyciągnięte wnioski.

Uwaga: Zanotować wartości parametrów projektowych **Q**, **R** i sprzężenia stanu **K** dające efekty najlepsze pod różnymi względami (skuteczności tłumienia drgań i małej wartości przyspieszenia nadwozia z jednej strony, małej amplitudy sterowania z drugiej strony). Wartości te

będą potrzebne w trakcie eksperymentu z modelem fizycznym w pkt. 3.3.B i projektowania regulacji LQG w pkt. 3.4.A.

6) Wyznaczyć logarytmiczne charakterystyki amplitudowe Bodego układu otwartego i układu zamkniętego (ze sprzężeniem stanu) z wejścia zakłócenia \dot{z}_r (wejście sterowania jest w układzie zamkniętym zajęte przez sprzężenie stanu) do wyjść mierzonych.

- Uwaga: Obliczenia będą prowadzone dla ostatniej obliczonej i pamiętanej w zmiennej Matlab K wartości wektora wzmocnień stanu.

- Skopiować do edytora lub bezpośrednio do okna komend Matlab i uruchomić poniższe linie kodu:

```
AS_OL = ss(A, B(:,1), C, D(:,1)) % open-loop with input #1 (zrdot) only
AS.InputName = {'velocity zrdot'};
AS.OutputName = {'defl. zs-zu'; 'acceler. zsddot'};
% closed-loop with input #1 (control input #2 is part of state-feedback)
AS_LQR = ss(A-B(:,2)*K, B(:,1), C-D(:,2)*K, D(:,1))
bodemag(AS_OL, AS_LQR, logspace(0,3,200)), grid
legend('open-loop', 'closed-loop with LQR state feedback')
```

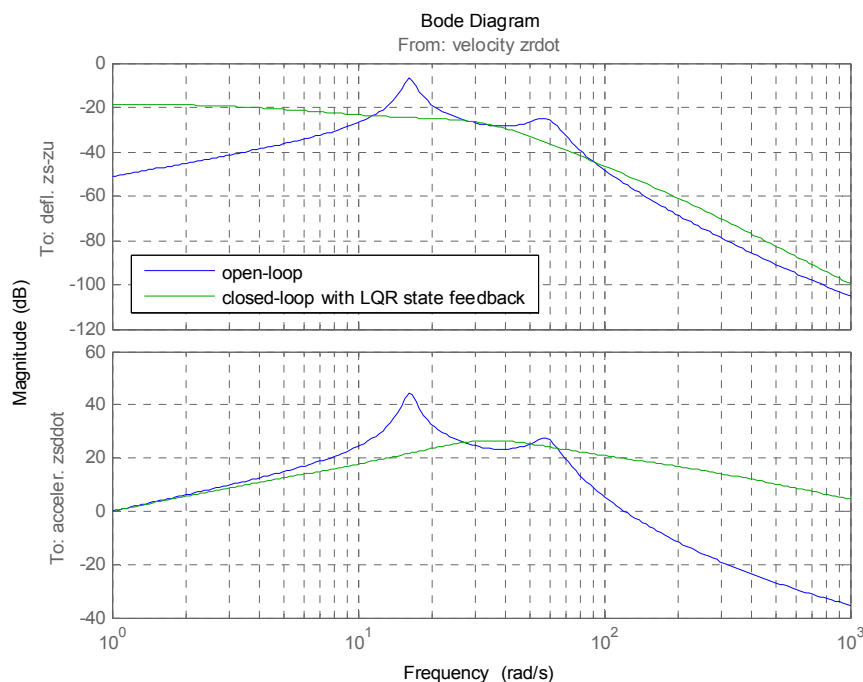
7) Wyznaczyć położenia biegunów i zer układu zamkniętego ze sprzężeniem stanu:

```
[p,z]=pzmap(AS_LQR) % pole-zero locations
pzmap(AS_OL, AS_LQR) % pole-zero-map
legend('open-loop AS', 'closed-loop AS-LQR')
axis([-30 10 -80 80])
```

- Skomentować zmianę położenia biegunów układu zamkniętego w porównaniu z biegunami układu otwartego (obiektu) i jej wpływ na dynamikę układu. Najeżdżając na wykresie wskaźnikiem myszki na krzyżyki 'x' oznaczające bieguny można odczytać parametry (Frequency, Damping), tj. pulsację drgań nietłumionych i względny współczynnik tłumienia (ω_n , ζ), obu par biegunów układu zamkniętego.

- W oparciu o schemat modelu zmiennych stanu z Rys. D1 wyjaśnić postać czwórki macierzy układu zamkniętego ($\mathbf{A}-\mathbf{B}_u\mathbf{K}$, \mathbf{B}_z , $\mathbf{C}-\mathbf{D}_u$, \mathbf{D}_z), gdzie \mathbf{B}_u i \mathbf{D}_u są macierzami wejścia sterowania (\mathbf{B} i \mathbf{D} na Rys. D1), a \mathbf{B}_z i \mathbf{D}_z - macierzami wejścia zakłócenia.

- Skomentować nieobecność pików rezonansowych na charakterystykach układu zamkniętego (Rys. 3.7).

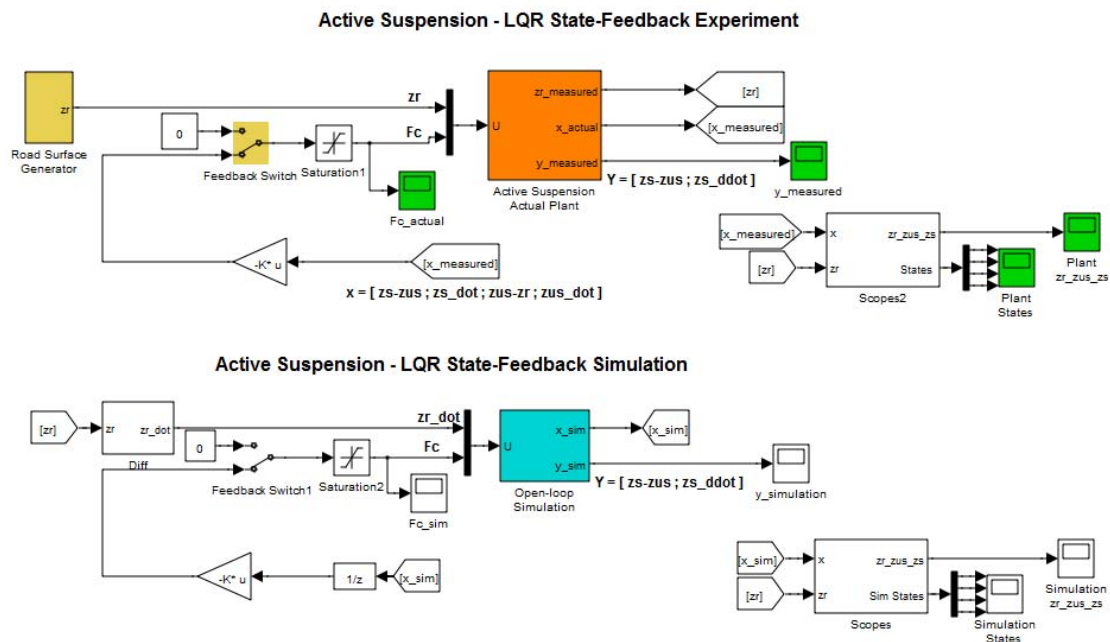


Rys. 3.7. Porównanie charakterystyk amplitudowych (z wejścia zakłócenia \dot{z}_r) układu otwartego i układu zamkniętego ze sprzężeniem LQR

B. Eksperymenty w układzie Active Suspension

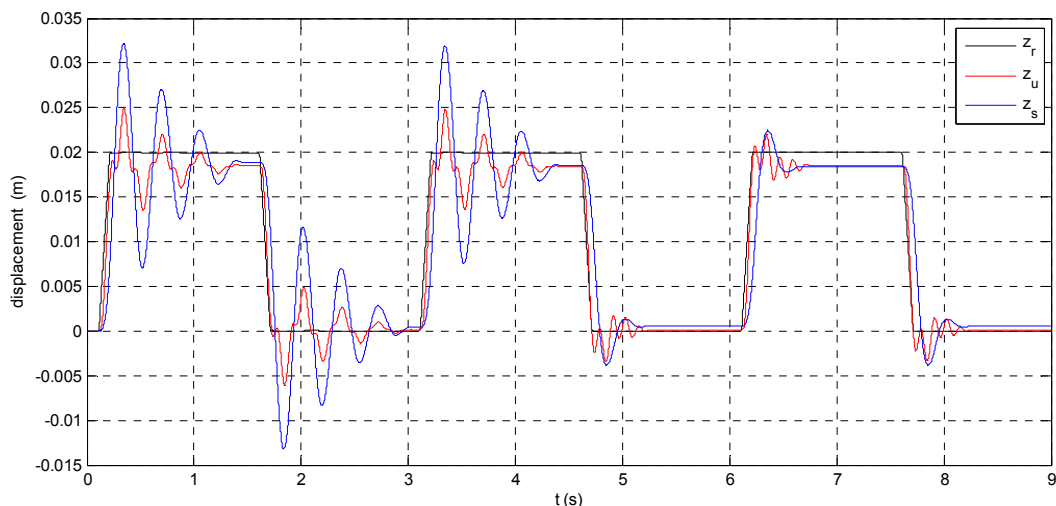
- 1) Otworzyć model Simulinka AS_LQR_Actual.mdl sterowania obiektem fizycznym (Rys. 3.8). Górna część modelu realizująca sprzężenie z modelem fizycznym i zawierająca w subsystemie Active Suspension Actual Plant bloki QUARCa jest podobna do górnego toru z Rys. 3.2 z tym, że sprzężenie zwrotne stanu generuje siłę F_c siłownika aktywnego zawieszenia. Do pomiaru zmiennych stanu (i wyznaczania siły sterującej) wykorzystywane są w tym przypadku sygnały z wszystkich trzech enkoderów. Zapoznać się z subsystemami i blokami schematu blokowego.
 - Ustawić przełącznik Feedback Switch w położenie zamykające sprzężenie zwrotne (dolne). Przełącznik ten służy do zamykania lub otwierania sprzężenia zwrotnego, również w czasie pracy modelu w czasie rzeczywistym
 - W subsystemie Road Surface Generator sprawdzić parametry bloków Pulse Generator i All Harmonics Generator (mają one być zgodne z wartościami podanymi w pkt. 3.3.A podpunkt 2). Przełącznik Road Switch ustawić w położeniu Pulse Generator.
 - Ustawić położenie zerowe płyty dolnej (poziomu drogi) w środku zakresu pomiędzy ogranicznikami przełącznika krańcowego i zatwierdzić je przyciskiem Limit. Sprawdzić włączenie się zielonej diody.
- 2) Sprawdzić, czy skrypt SETUP_ASP_PARAMETERS.m został uruchomiony z parametrem CONTROLLER_TYPE='LQR_GUI_Tuning', i czy odpowiednie zmienne zostały zainicjalizowane w pamięci roboczej Matlaba Workspace, w szczególności sprawdzić, czy $K=[0\ 0\ 0\ 0]$ i otwarte jest okno dialogowe interaktywnego strojenia on-line regulatora LQR.
- 3) Otworzyć do obserwacji okna oscyloskopów obiektu fizycznego: Plant zr_zus_zs (poziomy drogi, k a i nadwozia (m)), y_measured (mierzone wielkości wyjściowe: ugięcie zawieszenia zS-zus (m) i przyspieszenie nadwozia zsdot (m/s^2)) i Fc_actual (siła sterowania, (N)).
- 4) Przeprowadzić proces budowania i ładowania modelu RT (przycisk Incremental Building lub Ctrl+B). Połączyć się z modelem RT (przycisk Connect to target lub Ctrl+T) i uruchomić działanie modelu w czasie rzeczywistym (przycisk Start lub Ctrl+E). Przed wyznaczeniem wartości K (naciśnięciem Apply w oknie dialogowym strojenia on-line regulatora LQR) sprzężenie zwrotne nie jest zamknięte.
- 5) W przypadku poprawnego działania modelu fizycznego w układzie otwartym (z $K=[0\ 0\ 0\ 0]$), wpisać właściwy zestaw parametrów Q_{11} do Q_{44} i R wyznaczonych w pkt. 3.3.A w trakcie strojenia na podstawie symulacji i zamknąć sprzężenie zwrotne wciskając przycisk Apply (powoduje to wyliczenie i ustawienie niezerowego wzmocnienia K). Obserwować przebieg regulacji w układzie fizycznym.
 - **Uwaga:** Ostatnie 10 s przebiegów z modelu fizycznego są zapisywane w pamięci Workspace Matlaba w zmiennych plant_zr_zus_zs, y_meas, Fc_actual, plant_states (wielkości symulowane są również zapisywane jak w pkt. A). Można je otrzymać w oknach wykresów korzystając z m-plików skryptowych:


```
plot_plant_zr_zus_zs
plot_y_meas
plot_Fc_actual
plot_plant_states
```
 - Czy przebieg regulacji jest taki sam (podobny) jak w modelu symulacyjnym? Czy zaprojektowana regulacja LQR działająca w układzie rzeczywistym spełnia założone wymagania projektowe? Przebiegi tych samych wielkości w układzie rzeczywistym i modelu symulacyjnym można porównywać na odpowiednich, rejestrujących je równoległe oscyloskopach w górnej i dolnej części schematu blokowego.
- 6) W razie potrzeby przeprowadzić iteracyjnie dostrajanie regulatora w oknie dialogowym aż do osiągnięcia satysfakcjonującej jakości regulacji w układzie fizycznym dla zakłócenia zbliżonego do skokowego.
 - **Uwaga:** Zanotować jak poprzednio zestawy parametrów projektowych Q , R i sprzężenia stanu K dające efekty najlepsze pod różnymi względami w układzie fizycznym. Wartości te będą wykorzystane do doświadczalnego dostrajania regulacji LQG w pkt. 3.4.B.



Rys. 3.8. Model Simulinka do sterowania modelu fizycznego aktywnego zawieszenia pracującego w układzie zamkniętym z pełnym sprzężeniem stanu wyznaczonym metodą LQR (część górna) i symulacji analogicznego układu zamkniętego (jak na Rys. 3.6, część dolna)

- Zarejestrować przebiegi przesunięć koła i nadwozia w odpowiedzi na prostokątny przebieg zakłócenia z_r w układzie otwartym i po zamknięciu sprzężenia zwrotnego stanu. Powinny one wyglądać jak na Rys. 3.9. **W oknie oscyloskopu F_c kontrolować, czy wartość sygnału sterującego nie osiąga poziomu nasycenia.**
- Zwrócić uwagę na błędy odwzorowania przesunięcia poziomu drogi przez przesunięcia koła i nadwozia w stanie ustalonym na Rys. 3.9. Przedstawić możliwe przyczyny takiego zachowania. Zaproponować metodę modyfikacji algorytmu regulacji pozwalającą na wyeliminowanie błędów w stanie ustalonym.
- 7) Sprawdzić **zdolność regulacji do eliminowania dodatkowego zakłócenia** (odporności na błędy parametrów modelu użytego do zaprojektowania sprzężenia LQR stanu) poprzez zmianę obciążenia płyty górnej (nadwozia).
- Przykręcić do płyty górnej dodatkowy mosiężny obciążnik. Uruchomić układ i zaobserwować ewentualne zmiany. Usunąć dodatkowe obciążenie.
- Skomentować zaobserwowane efekty.
- 8) Przetawić przełącznik Road Surface Generator | Road Switch w położenie All Harmonics Generator i sprawdzić działanie regulacji dla zakłócenia sinusoidalnego o częstotliwości zmieniającej się w czasie od 1 do 6 Hz.
- Zarejestrować na jednym wykresie (jak w podpunkcie 6) przebiegi przesunięć koła i nadwozia w odpowiedzi na sinusoidalny przebieg zakłócenia z_r przed (w układzie otwartym) i po zamknięciu sprzężenia zwrotnego.
- Ocenić skuteczność regulacji pod względem eliminowania rezonansowego wzmacniania amplitudy oscylacji płyty nadwozia (częstotliwość rezonansowa płyty koła leży powyżej 6 Hz).
- Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów przedyskutować wrażliwość regulacji LQR na niezgodność układu rzeczywistego z jego modelem matematycznym (na podstawie którego regulacja jest projektowana).



Rys. 3.9. Przebiegi przesunięć z_u i z_s w odpowiedzi na prostokątny przebieg zakłócenia z_r w układzie otwartym i po zamknięciu sprzężenia zwrotnego stanu zaprojektowanego metodą LQR.

3.4. Regulacja LQG

Projektowanie pełnego sprzężenia stanu $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ opiera się na założeniu, że wartości wszystkich zmiennych stanu są dostępne. W praktyce tak często nie jest i wtedy sprzężenie stanu można zastosować jedynie pod warunkiem, że zmienne stanu można *odtworzyć* na podstawie pomiarów dostępnych wielkości wyjściowych (warunek obserwowalności stanu z wyjść mierzonych, patrz: Dodatek). Obserwowalność układu z wyjść $y_1 = z_s - z_u$ (ugięcie zawieszenia) i $y_2 = \ddot{z}_s$ (pionowe przyspieszenie nadwozia) została sprawdzona i potwierdzona w pkt. 3.2.

Do estymacji wektora stanu zostanie zastosowana metoda LQG, która daje optymalną estymatę stanu $\hat{\mathbf{x}}$ w warunkach działania na wejście układu *niemierzalnego* losowego zakłócenia \mathbf{w} i obciążenia pomiarów wyjścia losowym szumem pomiarowym \mathbf{v} . Zakłada się, że obiekt jest opisany równaniami:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{v} \quad (3.5)$$

W przypadku układu zawieszenia nierówności poziomu drogi można interpretować jako wejściowe zakłócenie losowe i wtedy $\mathbf{w} = \mathbf{B}_z \dot{z}_r$. Metoda LQG wyznacza optymalny wektor \mathbf{L} wzmocnień sprzężenia estymatora w równaniu:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}), \quad \text{gdzie } \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3.6)$$

minimalizujący asymptotyczną kowariancję błędu estymacji w funkcji kosztu:

$$J_{LQG} = \lim_{t \rightarrow \infty} E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T] \quad (3.7)$$

przy założeniu, że szum wejściowy \mathbf{w} i szum pomiarowy \mathbf{v} są wektorami wzajemnie niezależnych losowych procesów Gaussowskich o zerowej średniej i macierzach kowariancji odpowiednio \mathbf{Q}_w i \mathbf{R}_v . Ze względu na dualność problemu projektowania regulatora LQR i estymatora LQG macierze kowariancji pełnią we wskaźniku J_{LQG} taką analogiczną rolę jak macierze wagowe \mathbf{Q}_x i \mathbf{R} we wskaźniku J_{LQR} . Dla uproszczenia projektowaniu estymatora ograniczymy się do przypadku diagonalnych macierzy kowariancji:


$$\mathbf{Q}_w = \begin{bmatrix} Q_{w11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{w22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{w33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{w44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} R_{v11} & 0 \\ 0 & R_{v22} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

gdzie współczynniki diagonalne są wariancjami składowych szumu wejściowego i szumu pomiarowego (macierz \mathbf{R}_v szumu pomiarowego ma wymiar 2×2 ponieważ układ ma 2 wyjścia

mierzone). Szacowane wartości tych wariancji są parametrami projektowymi estymacji LQG. Ponieważ nie ma informacji na temat poziomu szumów te wariancje można szacować jako proporcjonalne do kwadratu zakresu zmienności odpowiednich zmiennych stanu i mierzonych wyjść obserwowanych na przebiegach.

Po połączeniu estymatora LQG ze sprzężeniem stanu otrzymamy regulator LQG ze sprzężeniem wyjścia (*output feedback*). Dodanie do niego sygnału zadanego stanowi tzw. *LQG servo-problem*.

A. Symulacje komputerowe

1) Wyczyścić pamięć roboczą Matlab'a i przejść do edycji pliku skryptowego `SETUP_ASP_PARAMETERS.m`. Uaktywnić linię skryptu `CONTROLLER_TYPE = 'LQG_GUI_Tuning_with_Full_Obs'` i uruchomić skrypt .

```
%CONTROLLER_TYPE='Open_Loop';           % Open-loop system
%CONTROLLER_TYPE='LQR_GUI_Tuning';       % GUI for interactive LQR tuning
CONTROLLER_TYPE='LQG_GUI_Tuning_with_Full_Obs'; %GUI interactive LQG tuning
...
```

- Uruchomienie skryptu re-inicjalizuje parametry modelu symulacyjnego, inicjalizuje macierze modelu obiektu $A_{obs}=A$; $B_{obs}=B(:,2)$; $C_{obs}=C$; w estymatorze (obserwatorze) stanu, ustawia początkowe wzmocnienie sprzężenia stanu $K=[0 \ 0 \ 0 \ 0]$ i otwiera okno dialogowe do interaktywnego strojenia parametrów *diagonalnych macierzy* funkcji kosztu (3.3) i macierzy

$$Q_W = \begin{bmatrix} Q_{W11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{W22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{W33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{W44} \end{bmatrix}, \quad R_V = \begin{bmatrix} R_{V11} & 0 \\ 0 & R_{V22} \end{bmatrix}$$

wariancji

(3.8)

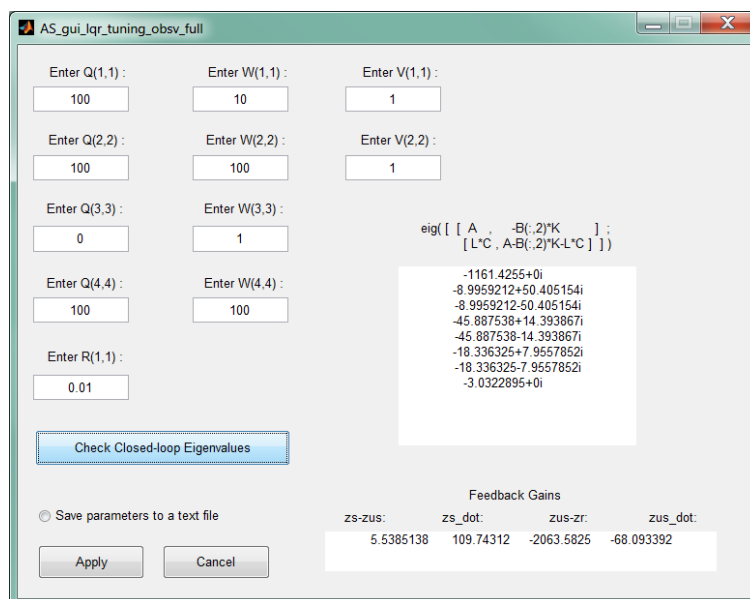
zakłóceń losowych oddziałujących na obiekt i szumu pomiarowego (Rys. 3.10). Wszystkie te macierze mają być nieujemnie określone należy wpisywać tylko dodatnie lub zerowe wartości współczynników.

- Współczynniki wagowe $Q_{11} \div Q_{44}$ i R_{11} i ich znaczenie były omawiane przy okazji projektowania sprzężenia stanu LQR. Większa względna wartość szacowanej wariancji składowej szumu wejściowego $Q_{W11} \div Q_{W44}$ oznacza przyjęcie większego błędu części modelu związanej z daną zmienną stanu i procedura LQG położy większy nacisk na minimalizację związanego z nią składnika funkcji J_{LQG} . Taki przypadek prowadzi do dużego wzmocnienia sprzężenia estymatora w wierszu L ($L_{11} \div L_{41}, L_{12} \div L_{42}$) odpowiadającym tej zmiennej (2 współczynniki dla każdej zmiennej stanu, bo mierzone są 2 wyjścia) i szybkiej estymacji opierającej się bardziej na składowej zależnej od pomiaru. Większa względna wartość szacowanej wariancji składowej szumu pomiarowego $Q_{V11} \div Q_{V22}$ odpowiadającej wyjściowej zmiennej mierzonej, że procedura LQG da w efekcie mniejsze sprzężenia estymatora w kolumnie L odpowiadającej temu wyjściu i wolniejszą estymację opierającą się bardziej na składowej zależnej od modelu (bo szum modelu jest w takim przypadku względnie mniejszy).
- Obserwator wykorzystuje wyjściowe sygnały mierzone z obiektu, tj. ugięcie zawieszania z_s-z_u oraz przyspieszenie nadwozia \ddot{z}_s do estymacji (nieznanego) wektora stanu obiektu $x=[z_s-z_u, \dot{z}_s, z_u-z_r, \dot{z}_u]$. Estymata \hat{x} jest następnie wykorzystywana do zamknięcia pętli regulacji przez sprzężenie stanu. Optymalizacja LQG sprzężenia estymatora ma na celu jak najszybsze sprowadzenie wektora błędu estymacji $x - \hat{x}$ do zera.
- Procedura wyznacza wektory sprzężenia stanu K i sprzężenia estymatora L dla widocznych wartości współczynników, każdorazowo po wciśnięciu przycisku **Apply**. Jeżeli zaznaczona jest opcja **Save parameters to a text file**, to zastosowane współczynniki zapisywane w pliku `lqg_tuning_logfile.txt`. Położenia biegunów układu zamkniętego, czyli wartości własnych podanej w oknie macierzy stanu układu zamkniętego z estymatorem i sprzężeniem stanu dla wyznaczonych K i L można sprawdzić w oknie wciskając przycisk **Check Closed-loop eigenvalues**. Do obliczenia optymalnego sprzężeń wykorzystywana jest *ta sama* funkcja Matlab'a:

```
K = lqr(A, B, Q, R);
```


$$L = \text{lqr}(A', C', W, V)';$$

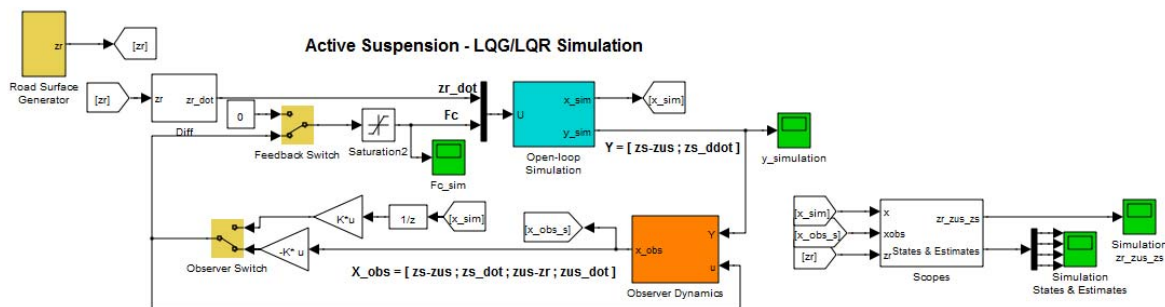
- Wartości składowych K i L są dostępne w oknie podglądu przestrzeni roboczej *Workspace*.
- Efekt działania wyliczonych wektorów K i L od razu widoczny w działaniu modelu Simulinka w czasie rzeczywistym (o ile model jest uruchomiony).



Rys. 3.10. Okno dialogowe GUI do interaktywnego strojenia on-line sprzężenia stanu LQR i estymatora stanu LQG i wyznaczania biegunów układu zamkniętego z regulatorem LQG

- Otworzyć model Simulinka *AS_LQG_Sim.mdl* (Rys. 3.11) do symulacji działania regulatora LQR z obserwatorem stanu.
 - Wykonać dla tego modelu czynności opisane wcześniej w pkt. 3.3.A podpunkty 2-3.
 - Ważne:** Otworzyć do obserwacji okno oscyloskopu *States & Estimates* (zmienne stanu: *zs – zus, zsdot, zus – zr, zudot* oraz ich estymaty (nazwy kończące się na *_obs*) wyznaczone przez obserwator i stanowiące jego wyjście). Obserwacja estymat zmiennych stanu pozwala na sprawdzenie, czy obserwator działa poprawnie.
 - Przeprowadzić proces budowania i ładowania modelu RT (przycisk *Incremental Building* lub *Ctrl+B*). Połączyć się z modelem RT (przycisk *Connect to target* lub *Ctrl+T*) i uruchomić symulację (przycisk *Start* lub *Ctrl+E*). Obserwować zachowanie się modelu aktywnego zawieszenia i przebiegi. Pamiętać, że przed wyznaczeniem wartości K i L (naciśnięciu *Apply* w oknie dialogowym strojenia on-line regulatora LQG) sprzężenie zwrotne nie jest zamknięte.
- **Uwaga:** Ostatnie 10 s przebiegów z bloków oscyloskopów są zapisywane w pamięci *Workspace* Matlaba w zmiennych *sim_zr_zus_zs*, *sim_states_estimates*, *y_sim*, *Fc_sim*, *sim_states*. Można je otrzymać w oknach wykresów korzystając z m-plików skryptowych:

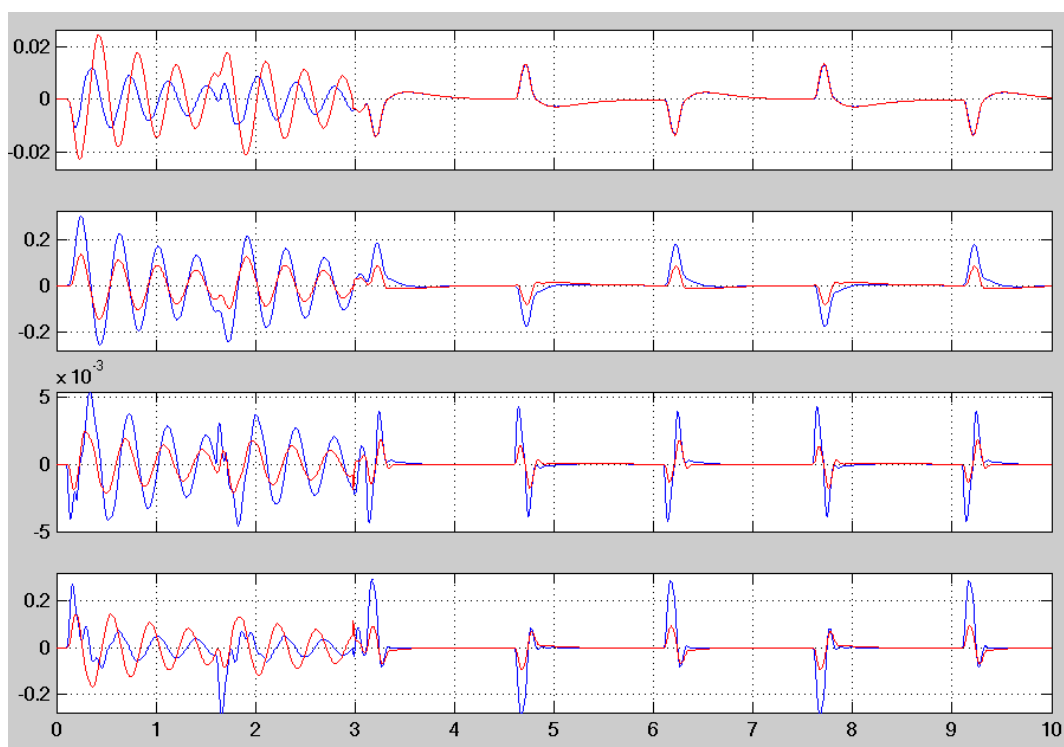
```
plot_sim_zr_zus_zs
plot_sim_states_estimates
plot_y_sim
plot_Fc_sim
```



Rys. 3.11. Model Simulinka do symulacji modelu aktywnego zawieszenia pracującego w układzie zamkniętym z pełnym sprzężeniem LQR stanu i obserwatorem LQG

5) Przejść do okna dialogowego interaktywnego strojenia online regulatora LQR.

- Wpisywać zestawy parametrów $Q_{11} \div Q_{44}$ i R zanotowane jako najlepsze w pkt. 3.3.A w efekcie symulacyjnego dostrojenia sprzężenia stanu K i dla każdego zestawu dostrojać sprzężenie estymatora L poprzez zmianę szacowanych wariancji $Q_{W11} \div Q_{W44}$, $Q_{V11} \div Q_{V22}$ metodą prób i błędów według wskazówek przedstawionych w podpunkcie 1). Wyznaczenie nowych wartości K i L powoduje każdorazowe wciśnięcie Apply. **Pamiętajmy, że projektowanie estymatora jest niezależne od projektowania sprzężenia stanu** przeprowadzonego w pkt. 3.3.
- Obserwować efekty w oknach oscyloskopów. Przebiegi estymat w oscyloskopie States & Estimates powinny możliwie szybko zbiegać się z przebiegami prawdziwych zmiennych stanu, jak na Rys. 3.12 po zamknięciu sprzężenia zwrotnego. Występujące rozbieżności są efektami działania zakłócenia zr .



Rys. 3.12. Przebiegi zmiennych stanu i ich estymat przed i po załączeniu obserwatora i zamknięciu sprzężenia zwrotnego. Ilustracja prawidłowego działania estymacji stanu

- Przelączając klucz Observer Switch sprawdzać, czy przebiegi (zs , zus oraz $zs-zus$, $zsddot$ w $y_measured$) w układzie z zaprojektowanym obserwatorem (sprzężeniem L) i sprzężeniem wyjścia różnią się od przebiegów w układzie z pełnym sprzężeniem stanu dla tego samego K (tych samych wartości parametrów $Q_{11} \div Q_{44}$ i R). Prawidłowo zaprojektowany obserwator powinien wpływać na te przebiegi w nieznaczny sposób.

- Dążyć do osiągnięcia celów regulacji zdefiniowanych w pkt. 3.3.A podpunkt 5. W oknie oscyloskopu FC kontrolować, czy wartość sygnału sterującego nie osiąga poziomu nasycenia.
- Wywnioskować, jakie ogólne efekty (trendy) w zachowaniu się układu regulacji wywołują różne wzajemne zmiany wartości pięciu parametrów projektowych. Zarejestrować przebiegi potwierdzające wyciągnięte wnioski.
Uwaga: Zanotować zestawy wartości parametrów projektowych Q , R , Q_w , R_v i wzmocnień K , L dające efekty najlepsze pod różnymi względami (**do wykorzystania w trakcie eksperymentu z modelem fizycznym**).
- 6) Wyznaczyć logarytmiczne charakterystyki amplitudowe Bodego układu otwartego i układu zamkniętego (z regulatorem LQG ze sprzężeniem stanu i obserwatorem) z wejścia zakłócenia \dot{z}_r (wejście sterowania jest w układzie zamkniętym zajęte przez sprzężenie stanu) do wyjść mierzonych.
- Uwaga: Obliczenia będą prowadzone dla ostatnich obliczonych i pamiętanych w zmiennej Matlaba K i L wartości wzmocnień stanu i estymatora.
- Skopiować do edytora lub bezpośrednio do okna komend Matlaba i uruchomić poniższe linie kodu:

```
AS = ss(A, B, C, D); % AS plant
AS.InputName = {'velocity zrdot', 'force Fc'};
AS.OutputName = {'defl. zs-zu'; 'acceler. zsddot'};
AS_OL = ss(A, B(:,1), C, D(:,1)) % open-loop with input #1 (zrdot) only
% closed-loop with input #1 (control input #2 is part of state-feedback)
AS_LQR = ss(A-B(:,2)*K, B(:,1), C-D(:,2)*K, D(:,1))
sensors = 1:2; knowninp = 2;
kest = estim(AS,L,sensors,knowninp); % state/output estimator
regLQG = lqgreg(kest, K);
feedin=2; feedout=[1,2];
AS_LQG = feedback(AS, regLQG, feedin, feedout, +1); % with 2 inputs
bodemag(AS_OL, AS_LQR, AS_LQG(:,1), logspace(0,3,200)), grid
legend('open-loop', 'LQR regulator', 'LQG observer/regulator')
```

- 7) Wyznaczyć położenia biegunów i zer układu zamkniętego z regulatorem LQG:

```
[p,z]=pzmap(AS_LQG) % pole-zero locations
pzmap(AS, AS_LQR, AS_LQG) % pole-zero-map
legend('open-loop AS', 'closed-loop AS-LQR', 'closed-loop AS-LQG/observer')
axis([-30 10 -80 80])
```

- Porównać liczbę i położenia biegunów układów zamkniętych: ze sprzężeniem stanu LQR i z regulatorem LQG. Zwrócić uwagę na pojawienie się dodatkowych biegunów reprezentujących dynamikę obserwatora. Odczytać jak poprzednio parametry biegunów układu zamkniętego z regulatorem LQG.

- 8) Wyznaczyć macierz transmitancji samego regulatora LQG (jego wejścia to mierzone wyjścia obiektu $z_s - z_u, \dot{z}_s$, a wyjście to sygnał sterujący F_c):

```
GLQGtf = tf(regLQG)
```

- Jaki jest rząd transmitancji obserwatora?

B. Eksperymenty w układzie Active Suspension

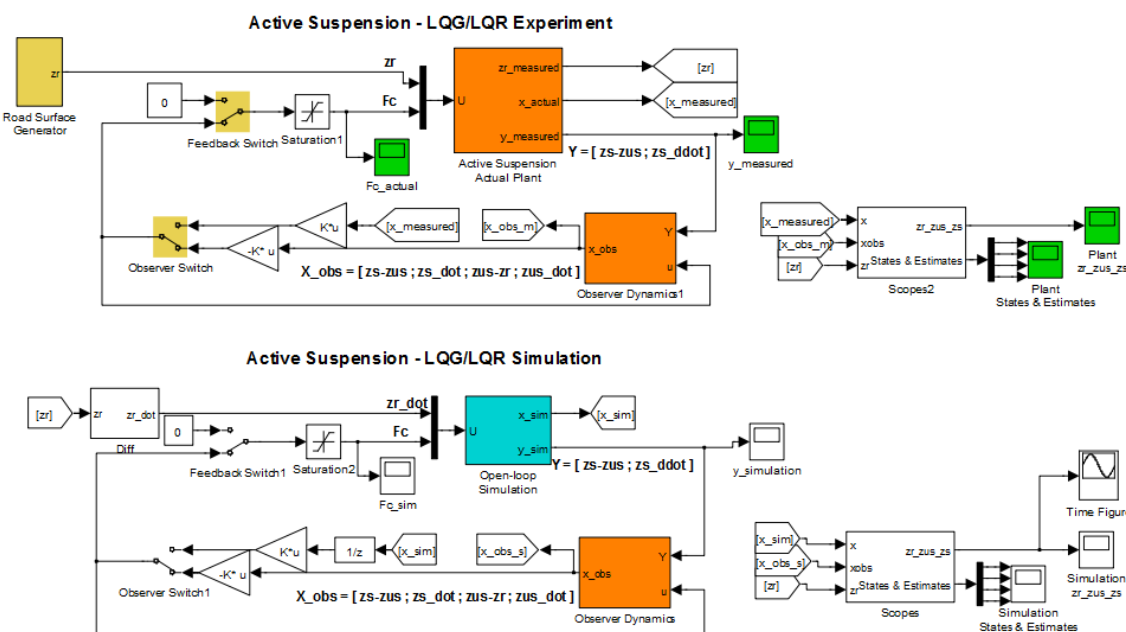
- 1) Otworzyć model Simulinka AS_LQG_Actual.mdl sterowania obiektem fizycznym (Rys. 3.13). Górna część modelu realizuje sprzężenie z modelem fizycznym i zawiera w subsystemie Active Suspension Actual Plant bloki QUARCa. Przełącznik Observer Switch służy do przełączania pomiędzy regulatorem LQG ze sprzężeniem wyjścia i obserwatorem a sprzężeniem LQR stanu.
- 2) Przeprowadzić procedurę uruchamiania modelu jak w pkt. 3.3.B.
- 3) W przypadku poprawnego działania modelu fizycznego w układzie otwartym wpisywać zestawy parametrów projektowych $Q_{11} \div Q_{44}$ i R zanotowanych po doświadczalnym dostrojeniu sprzężenia LQR stanu w pkt. 3.3.B, oraz parametrów $Q_{w11} \div Q_{w44}$, $Q_{v11} \div Q_{v22}$, wyznaczonych w pkt. 3.4.A w trakcie symulacyjnego strojenia estymatora i zamknąć sprzężenie zwrotne wciskając przycisk Apply. Obserwować przebieg regulacji w układzie fizycznym.

4) W razie potrzeby przeprowadzić iteracyjnie dostrajanie estymatora LQG w oknie dialogowym (zmieniając parametry $Q_{W11} + Q_{W44}$, $Q_{V11} + Q_{V22}$) aż do osiągnięcia satysfakcjonującej jakości regulacji w układzie fizycznym.

- **Uwaga:** Ostatnie 10 s przebiegów z modelu fizycznego są zapisywane w pamięci Workspace Matlab w zmiennych `plant_zr_zus_zs`, `plant_states_estimates`, `zr_zus_zs`, `y_meas`, `Fc_actual` (wielkości symulowane są również zapisywane jak w pkt. A). Można je otrzymać w oknach wykresów korzystając z m-plików skryptowych:

```
plot_plant_zr_zus_zs
plot_plant_states_estimates
plot_y_meas
plot_Fc_actual
```

- Przelączając przełącznik **Observer Switch** porównywać efekty regulacji LQR (ze sprzężeniem stanu) i LQG (ze sprzężeniem wyjścia) modelu fizycznego dla tej samej wartości **K** (przebiegi **zs**, **zus** oraz **zs-zus**, **zsddot** w **y_measured**). Czy wpływ dynamiki obserwatora jest widoczny?
- Porównać efekty regulacji LQG modelu fizycznego z efektami obserwowanymi w trakcie symulacji. Wskazać przyczyny ewentualnych różnic.



Rys. 3.13. Model Simulinka do sterowania modelu fizycznego aktywnego zawieszenia pracującego w układzie zamkniętym ze sprzężeniem stanu i obserwatorem wyznaczonym metodą LQG (część górna) i symulacji analogicznego układu zamkniętego (część dolna)

4. Opracowanie sprawozdania

Opracować i skomentować uzyskane wyniki na podstawie pytań i wskazówek oznaczonych w instrukcji symbolem ‘➤’ oraz według ewentualnych dodatkowych wytycznych prowadzącego zajęcia.

Literatura

1. *Active Suspension LQG Control Using QUARC. Student Manual*, Quanser, 2011.

2. *QUARC. User Manual*, Quanser, 2011.
3. Hespanha J.P.: *Undergraduate Lecture Notes on LQG/LQR controller design*, 2007.
4. Ogata K.: *Modern Control Engineering*, wyd. 5, Prentice Hall, 2010.
5. Nise N.: *Control Systems Engineering*, wyd.6, John Wiley & Sons, 2010.
6. Kaczorek T., Dzieliński A., Dąbrowski W., Łopatka R.: *Podstawy teorii sterowania*. WNT, 2009.
7. Dębowski A.: *Automatyka. Podstawy teorii*. WNT, 2008

Częstochowa, 2014

Dodatek

Projektowanie regulacji ciągłej w przestrzeni stanu (*modern control design*)

D.1. Model matematyczny obiektu

Będziemy posługiwać się modelem matematycznym wielowymiarowego (MIMO – *Multi-Input Multi-Output*) stacjonarnego liniowego układu dynamicznego w formie układu n równań różniczkowych pierwszego rzędu (równania stanu) i l równań algebraicznych (równania wyjścia) postaci:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_z\mathbf{z}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + [\mathbf{B} \ \mathbf{B}_z] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}_z\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + [\mathbf{D} \ \mathbf{D}_z] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

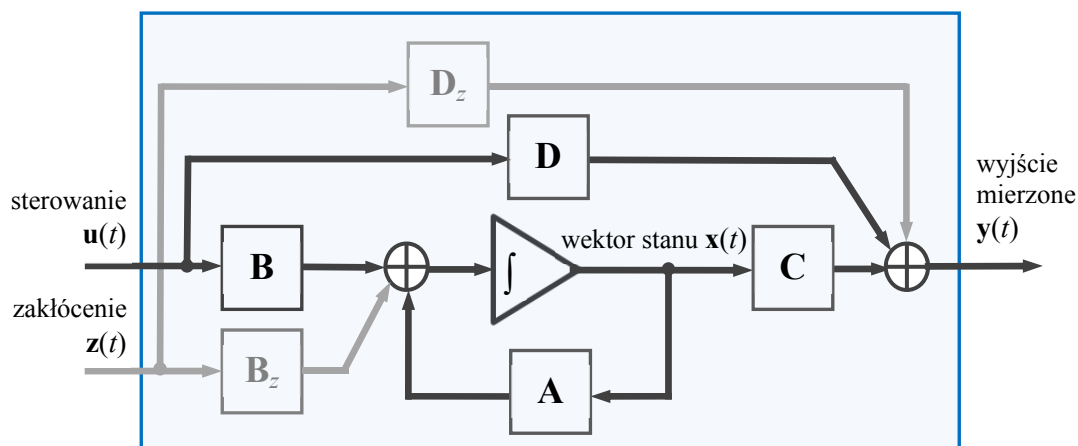
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{k_z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix}$$

gdzie: $\mathbf{x}(t)$ – wektor n zmiennych stanu, $\mathbf{u}(t)$ – wektor k wejść sterujących, $\mathbf{z}(t)$ – wektor k_z wejść zakłóceń (które mogą być znane, jeżeli są deterministyczne i mierzone, lub reprezentować niemierzalne szумы działające na obiekt), $\mathbf{y}(t)$ – wektor l wyjść mierzonych (Rys. D.1). Model uwzględnia też występowanie na wyjściu szumów pomiarowych reprezentowanych przez wektor $\mathbf{v}(t)$. Macierze \mathbf{A} ($n \times n$), \mathbf{B} ($n \times k$), \mathbf{B}_z ($n \times k_z$), \mathbf{C} ($l \times n$), \mathbf{D} ($l \times k$), \mathbf{D}_z ($l \times k_z$) są macierzami o stałych współczynnikach zależnych od parametrów fizycznych modelowanego obiektu.

Wyjścia mierzone $\mathbf{y}(t)$ są wykorzystywane do regulacji jako sygnały sprzężenia zwrotnego. Wielkości, które w efekcie regulacji mają przy braku sygnału zadanego osiągnąć wartości zerowe (albo możliwie najmniejsze) i które liniowo zależą od $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{u}(t)$ można traktować jako l_c wirtualnych wyjść sterowanych modelu (nie wszystkie muszą być mierzone):

$$\mathbf{y}_c(t) = \mathbf{C}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c\mathbf{u}(t), \quad (\text{D.2})$$

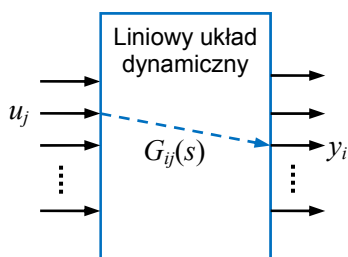
gdzie \mathbf{C}_c ($l_c \times n$), \mathbf{D}_c ($l_c \times k$). Wybór \mathbf{y}_c można traktować jako parametr projektowy, w szczególności \mathbf{y}_c jest argumentem wskaźników jakości projektowania sterowania optymalnego LQ. Ograniczymy się do typowego przypadku, kiedy regulacja ma na celu sprowadzenie do zera wielkości mierzonych i wtedy $\mathbf{y}_c \equiv \mathbf{y}$ i $\mathbf{C}_c = \mathbf{C}$, $\mathbf{D}_c = \mathbf{D}$.



Rys. D.1. Model wielowymiarowego stacjonarnego liniowego układu dynamicznego z uwzględnieniem zakłóceń na wejściu

Macierz transmitancji liniowego układu wielowymiarowego

Na podstawie równania operatorowego liniowego układu wielowymiarowego można wyprowadzić zależność pomiędzy transformatami wybranego wyjścia i wejścia. Macierz transmitancji wymuszeniowych $G(s)$ określa zależność pomiędzy wektorami transformat wyjścia mierzonego $Y(s)$ i wejścia sterującego $U(s)$:



$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \rightarrow \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \underbrace{\left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \right]}_{\mathbf{G}(s)_{l \times k}} \mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1k}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{l1}(s) & \cdots & G_{lk}(s) \end{bmatrix}, \quad G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} \quad (\text{D.3})$$

D.2. Procedura projektowania sterowania

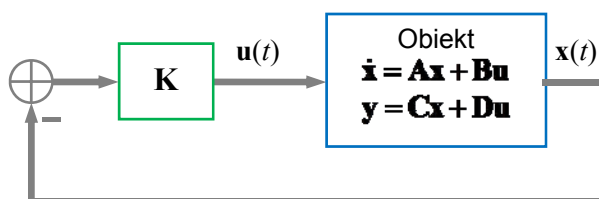
Procedura projektowania regulacji liniowej w przestrzeni stanu składa się z następujących kroków:

1. **Projektowanie sprzężenia stanu $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$** zapewniającego asymptotyczną stabilność układu zamkniętego i osiągnięcie zakładanych właściwości przebiegów przejściowych. Zakłada się, że wartość zadana $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ i że wszystkie zmienne stanu są dostępne (mierzone). Warunkiem istnienia (jednoznacznego rozwiązania) jest *sterowalność* obiektu sterowania. Projektowanie sterowania bez sygnału zadanego daje dobre tłumienie zakłóceń i zapewnia, że wyjście sterowane $y_c \rightarrow 0$.
2. **Projektowanie obserwatora (estymatora) stanu \mathbf{L} .** Jest to algorytm (część regulatora), który na podstawie sterowania \mathbf{u} i mierzonego wyjścia \mathbf{y} oraz *modelu* obiektu estymuje wartości zmiennych stanu (wszystkich lub tylko nie podlegających pomiarowi). Warunkiem istnienia (jednoznacznego rozwiązania) jest *obserwowalność* obiektu sterowania.
3. **Połączenie sprzężenia stanu i obserwatora** – regulacja ze **sprzężeniem wyjścia**. Sterowanie $\mathbf{u} = -\mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}$ jest generowane na podstawie estymaty stanu $\hat{\mathbf{x}}$ otrzymanej z obserwatora.
4. Rozszerzenie struktury regulatora polegające na wprowadzeniu sygnału zadanego (*reference / command signal*) $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, działania całkującego w regulatorze (regulacji *astatycznej*), czy też regulacji nadążnej (*tracking control*).

Uwaga: W dalszych punktach należy pamiętać, że macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}_z, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{D}_z$ wykorzystywane do projektowania algorytmu regulacji są elementami przyjętego *modelu* obiektu. Model ten nie jest zwykle dokładny pod względem wartości parametrów lub nawet struktury.

D.3. Projektowanie sprzężenia stanu

Zadanie polega na wyznaczeniu współczynników macierzy (wektora) sprzężenia stanu \mathbf{K} ($k \times n$), dla którego (przy braku wartości zadanej, tj. $\mathbf{r} = \mathbf{0}$) sterowanie $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ sprowadza wektor stanu \mathbf{x} (oraz wyjście sterowane) do zera ze stanem przejściowym spełniającym założone warunki (Rys. D.2). W tym miejscu zakłada się, że wszystkie zmienne stanu są dostępne.



Rys. D.2. Regulacja ze sprzężeniem stanu

Równanie układu zamkniętego ze sprzężeniem stanu i bez sygnału zadanego:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \quad (\text{D.4})$$

Pierwiastki równania charakterystycznego układu zamkniętego mogą być przesunięte do zadanych położeń przez jednoznacznie określone statyczne sprzężenie stanu $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, jeżeli obiekt jest sterowalny. Zadanie projektowe polega na wyznaczeniu współczynników macierzy wzmocnień \mathbf{K} zapewniających wymagane rozmieszczenie pierwiastków s_1, s_2, \dots, s_n równania charakterystycznego układu zamkniętego $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej ($\det \mathbf{A}$ oznacza wyznacznik macierzy \mathbf{A}):

$$\begin{aligned} \alpha_c(s) &= \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})] = 0 \\ \alpha_c(s) &= (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Definicja sterowalności 1: Liniowy układ dynamiczny opisany macierzami (\mathbf{A}, \mathbf{B}) jest sterowalny, jeżeli istnieje skończone, kawałkami ciągle sterowanie $\mathbf{u}(t)$, które przeprowadza układ liniowy (od dowolnego stanu początkowego \mathbf{x}_0 do dowolnego stanu końcowego \mathbf{x}_{fin} w skończonym czasie τ .

Definicja sterowalności 2: Układ opisany macierzami (\mathbf{A}, \mathbf{B}) jest sterowalny, jeśli dla dowolnego wielomianu $\alpha_c(s)$ n -tego stopnia istnieje jednoznacznie określona reguła sterowania $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ taka, że równanie charakterystyczne macierzy $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ jest równe $\alpha_c(s) = 0$.

Test matematyczny sterowalności: Macierz sterowalności

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

musi być pełnego rzędu, tj. $\text{rank } \mathbf{C} = n$.

Obliczenie \mathbf{K} jest najprostsze dla tzw. *kanonicznej formy regulatora* macierzy \mathbf{A}, \mathbf{B} . Dla układu z jednym wejściem i jednym wyjściem (SISO) o mianowniku transmitancji:

$$M(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

rozwiązaniem jest sprzężenie stanu o współczynnikach:

$$K_1 = -a_0 + \alpha_{c0}, \quad K_2 = -a_1 + \alpha_{c1}, \quad \dots, \quad K_n = -a_{n-1} + \alpha_{c(n-1)},$$

$$\text{gdzie: } \alpha_c(s) = s^n + \alpha_{c(n-1)}s^{n-1} + \alpha_{c(n-2)}s^{n-2} + \dots + \alpha_{c0}$$

Kiedy współczynniki wielomianu $\alpha_c(s)$ są już wyznaczone, do określenia wzmocnienia sprzężenia regulatora stosuje się wzór Ackermanna:

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \mathbf{C}^{-1} \alpha_c(\mathbf{A}),$$

$$\text{gdzie } \alpha_c(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{c(n-1)}\mathbf{A}^{n-1} + \alpha_{c(n-2)}\mathbf{A}^{n-2} + \dots + \alpha_{c0}\mathbf{I}$$

Zasady projektowe dotyczące wyboru położeń biegunów układu zamkniętego:

- znaczenie zmiany położeń biegunów układu ze sprzężeniem w stosunku do położeń wyjściowych wymaga dużych sygnałów sterujących $\mathbf{u}(t)$ (bieguny są „przyciągane” przez zera),
- koryguje się tylko niepożądaną część dynamiki układu otwartego – wymaga to mniejszego działania (amplitudy sterowania).

Metody określania położenia biegunów układu zamkniętego

Metoda 1: Rozmieszczanie biegunów (*pole placement*). Układy prototypowe

Dla układów niskiego rzędu ($n \leq 3$) projektuje się wielomian $\alpha_c(s)$ z parą biegunów dominującymi o parametrach ω_n, ζ i ew. biegunem dodatkowym: $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + a\zeta\omega_n)$, zapewniających wymagane czas regulacji, maksymalne przeregulowanie i czas narastania (t_r, M_p i t_n).

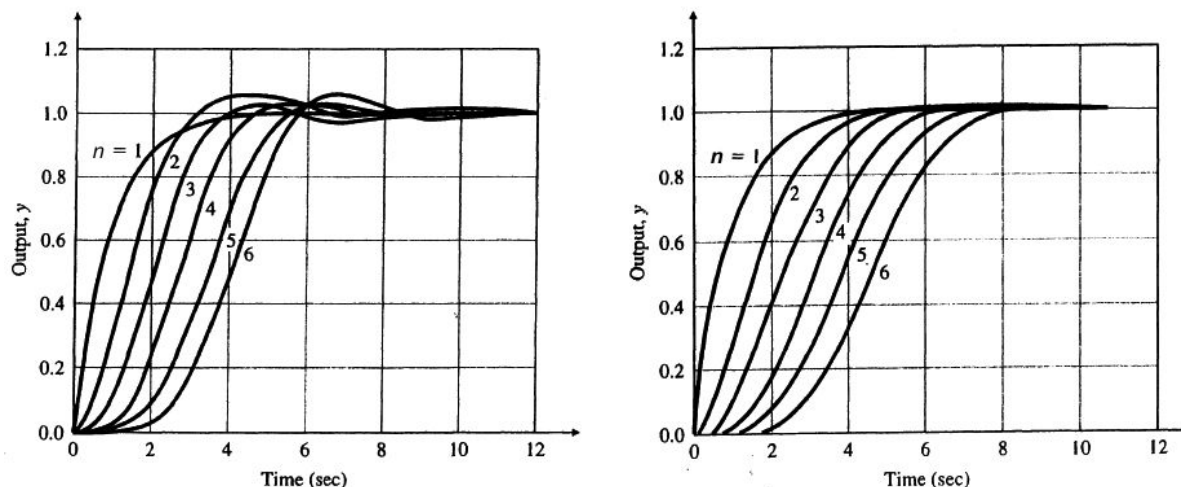
Dla układów wyższych rzędów ($n \geq 3$) można projektować $\alpha_c(s)$ układu zamkniętego odpowiadający jednemu z układów *prototypowych danego rzędu o potrzebnych właściwościach*, np. filtrowi Bessela lub spełniającemu całkowite kryterium ITAE.

Rząd n	Położenie biegunów prototypu ITAE	Położenie biegunów prototypu Bessela
1	$s+1$	$s+1$
2	$s+0.707 \pm j0.707$	$s+0.866 \pm j0.5$
3	$(s+0.708)(s+0.521 \pm j1.608)$	$(s+0.942)(s+0.746 \pm j0.711)$
4	$(s+0.424 \pm j1.263)(s+0.626 \pm j0.414)$	$(s+0.657 \pm j0.830)(s+0.905 \pm j0.271)$
5	$(s+0.896)(s+0.376 \pm j1.292) \cdot (s+0.576 \pm j0.534)$	$(s+0.926)(s+0.591 \pm j0.907) \cdot (s+0.852 \pm j0.443)$
6	$(s+0.310 \pm j1.263)(s+0.581 \pm j0.783) \cdot (s+0.735 \pm j0.287)$	$(s+0.539 \pm j0.962)(s+0.800 \pm j0.562) \cdot (s+0.909 \pm j0.186)$

Wzory w tabeli są podane dla nominalnej pulsacji $\omega_0=1$ rad/s. Dla $\omega_0 \neq 1$ należy zastosować podstawienie $s \rightarrow s/\omega_0$.

Uwaga: Jeśli naturalne częstotliwości układu otwartego znacznie się różnią zastosowanie prototypu sprawia, że wymagany będzie duży sygnał sterujący, ponieważ naturalne częstotliwości prototypów są w przybliżeniu jednakowe i następuje znaczące przesunięcie biegunów układu zamkniętego w stosunku do biegunów układu otwartego.

- Prototypy ITAE wykazują kilkuprocentowe (ok. 5%) przeregulowanie i mają szybsze (w porównaniu z prototypem Bessela) narastanie odpowiedzi skokowych.
- Prototypy Bessela *praktycznie nie mają przeregulowania* charakterystyk czasowych, monotoniczne częstotliwościowe charakterystyki amplitudowe i charakterystyki fazowe zbliżone do liniowych.
- Pasma przenoszenia prototypu ITAE (dla takiego samego ω_0) jest większe, a dla takiego samego pasma -3dB prototyp ITAE lepiej tłumi szumy wysokoczęstotliwościowe.



Rys. D.3. Odpowiedzi skokowe prototypów ITAE i Bessela rzędu $n=1 \div 6$, $\omega_0=1$

Metoda 2: Regulacja LQR (Linear Quadratic Regulator)

Zagadnienie LQR polega na wyznaczeniu dla (sterowalnego) układu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

optymalnego sprzężenia stanu $\mathbf{u} = -\mathbf{Kx}$, które dla dowolnego warunku początkowego $\mathbf{x}(0)$ minimalizuje kwadratowy wskaźnik jakości z waznieniem wyjść sterowanych, w naszym przypadku $\mathbf{y}_c = \mathbf{y}$ (rozpatrujemy tu tylko nieskończony horyzont sterowania):

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} [\mathbf{y}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + 2\mathbf{y}^T(t) \mathbf{N} \mathbf{u}(t)] dt \quad (\text{D.6})$$

gdzie macierze wagowe \mathbf{Q} i \mathbf{R} są dodatnio określonymi macierzami symetrycznymi. Często wybiera się \mathbf{Q} i \mathbf{R} , w których niezerowe są tylko współczynniki diagonalne Q_{ii} i R_{jj} . W takim przypadku wskaźnik zawiera tylko sumę ważoną funkcji energii wyjść sterowanych i sterowań:

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=1}^l Q_{ii} y_i^2(t) + \sum_{j=1}^k R_{jj} u_j^2(t) \right] dt$$

W przypadku szczególnym układu z jednym wejściem i jednym wyjściem sterowanym stosuje się pojedynczy współczynnik wagowy:

$$J = \int_0^{\infty} [y^2(t) + \rho u^2(t)] dt$$

Pierwszy wybór współczynników diagonalnych macierzy \mathbf{Q} i \mathbf{R} określa reguła Brysona:

$$Q_{ii} = \frac{1}{\max \text{dopuszczalne } y_{ci}^2}, \quad R_{jj} = \rho_j \frac{1}{\max \text{dopuszczalne } u_j^2} \quad (\text{D.7})$$

- Mianowniki współczynników skalują składniki J_{LQR} w taki sposób, że maksymalna dopuszczalna wartość każdego z nich jest równa 1, natomiast ρ_i nadają wagi poszczególnym składowym wektora sterowań.
- Duże wartości współczynników wagowych R_{ii} ($\rho_i > 1$) prowadzą do regulacji, która minimalizuje energię sterowań u_j kosztem większych wartości sterowanych wyjść, np. błędów regulacji (odchyleń od wartości zadanych). Małe wartości $\rho_i \ll 1$ powodują, że Q_{ii} są relatywnie większe i regulacja minimalizuje bardziej energię odpowiednich wyjść y_i kosztem większej energii sterowań u_j .
- Projektowanie można sprowadzić do zagadnienia z jednym parametrem $\rho_i = \rho$ jednakowym dla wszystkich sterowań (łatwość projektowania).

Po podstawieniu równania wyjścia sterowanego $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$ otrzymuje się równoważny wskaźnik z waznieniem zmiennych stanu \mathbf{x} :

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \underbrace{\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}}_{\text{nowe } \mathbf{Q}_x} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + 2\mathbf{x}^T \underbrace{\mathbf{C}^T \mathbf{N}}_{\text{nowe } \mathbf{N}_x} \mathbf{u}) dt$$

Uwagi: 1) Macierz $\mathbf{M}_{n \times n}$ jest dodatnio określona, jeżeli $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} > 0$ dla dowolnego $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. 2) Dla wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ iloczyn skalarny $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Rozwiązaniem zagadnienia LQR jest macierz wzmocnień sprzężenia stanu:

$$\mathbf{K}_{LQR} = (\mathbf{D}^T \mathbf{Q} \mathbf{D} + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{D}^T \mathbf{Q} \mathbf{C})$$

gdzie macierz \mathbf{P} jest jedynym dodatnio określonym rozwiązaniem tzw. algebraicznego równania Ricattiego:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} - (\mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{D})(\mathbf{D}^T \mathbf{Q} \mathbf{D} + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{D}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}) = \mathbf{0}$$

Właściwości regulacji LQR:

- Jeżeli obiekt jest sterowalny i obserwowalny z wyjścia y , to Sprzężenie stanu K_{LQR} zapewnia asymptotyczną stabilność układu zamkniętego $A-BK$.
- Jeżeli $D^T C=0$, to regulacja LQR jest w naturalny sposób odporna na *niepewność modelu obiektu (robust)*.
Np. dla układu z jednym wejściem i wyjściem zachodzi nierówność (Kalmana): $|1 + G_0(j\omega)| \geq 1$, tzn. wykres Nyquista transmitancji układu otwartego nie wchodzi do okręgu jednostkowego o środku w punkcie $(-1, j0)$.
- Dla $\omega \gg 1$ transmitancja układu otwartego z regulatorem LQR:

$$|G_o(j\omega)| \approx \frac{\text{const}}{\omega\sqrt{\rho}}$$

Oznacza to słabe tłumienie w zakresie HF (-20 dB/dek). Pulsacja odcięcia $\omega_c \sim 1/\sqrt{\rho}$ (mniejsze ρ daje w efekcie szybsze działanie układu).

D.4. Projektowanie obserwatora (estymatora stanu)

W praktyce zwykle nie wszystkie zmienne stanu są znane (ze względu na liczbę koszt czujników pomiarowych lub fizyczną niedostępność zmiennych, np. w reaktorze jądrowym). Jeżeli jednak obiekt spełnia warunek *obserwowalności*, to dysponując modelem (A, B, C) i sterowaniami u można odtworzyć zmienne stanu mierząc wyjścia y . Można wtedy w sprzężeniu stanu zastąpić prawdziwe zmienne stanu przez ich estymaty: $u = -K \hat{x}$. Jeżeli estymuje się wszystkie zmienne stanu estymator nazywa się estymatorem *pełnego rzędu*.

Wprowadźmy błąd estymacji stanu:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Błąd ten zbiega się do zera jeśli macierz stanu A jest asymptotycznie stabilna (tzn. ma pierwiastki równania charakterystycznego $\det(sI-A)=0$ w lewej półpłaszczyźnie), ale z taką szybkością (dynamiką) jak same zmienne stanu, ponieważ:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}$$

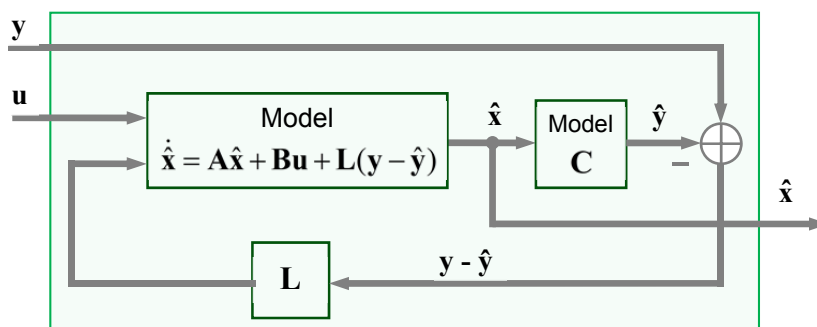
Aby sterowanie z estymacją miało sens zbieżność ta musi być szybsza. Wprowadźmy w tym celu sprzężenie L ($n \times l$) od błędu estymacji wyjścia (zakładając, że model obiektu jest *dokładny*):

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) = A\hat{x} + Bu + L(Cx - C\hat{x}) = A\hat{x} - BKx + LC\tilde{x} \tag{D.8}$$

(skorzystano z równań wyjścia $y=Cx$ i sprzężenia stanu $u=-Kx$). Dynamikę błędu estymacji ze sprzężeniem $L(y - \hat{y})$ otrzymujemy po porównaniu pochodnych wektora stanu i jego estymaty:

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (Ax + Bu) - (A\hat{x} + Bu + LC\tilde{x}) = (A - LC)\tilde{x} \tag{D.9}$$

Schemat estymatora stanu pełnego rzędu jest przedstawiony na Rys. D.4.



Rys. D.4. Struktura obserwatora z estymatorem stanu pełnego rzędu

Równania dynamiki układu zamkniętego ze sprzężeniem stanu \mathbf{K} i dynamiki błędu estymacji ze sprzężeniem \mathbf{L} w obserwatorze mają taką samą postać:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\tilde{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

Sprzężenie \mathbf{L} należy dobrać tak, żeby dynamika błędu (określona przez pierwiastki równania charakterystycznego macierzy $\mathbf{A-LC}$) była stabilna i szybka. Wtedy (jeśli nie ma zakłóceń) $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{0}$, czyli $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}$, szybciej niż przebiega sterowanie $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ w układzie zamkniętym ($\mathbf{A-BK}$) i wykorzystanie estymat $\hat{\mathbf{x}}$ (zamiast prawdziwych zmiennych stanu \mathbf{x}) jest uzasadnione. Jeżeli nawet model ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$) w estymatorze nie jest dokładny lub pomiary \mathbf{y} są zaszumione, to \mathbf{L} można wybrać w taki sposób, żeby błąd estymacji $\tilde{\mathbf{x}}$ był mały.

Trzeba pamiętać, że estymator jest częścią regulatora (czyli zazwyczaj algorytmu), więc nie ma fizycznych ograniczeń na wybór \mathbf{L} zapewniający dużą szybkość estymacji (w przeciwieństwie do wyboru \mathbf{K} i szybkości regulacji ograniczonej np. mocą elementów wykonawczych).

Projektowanie regulatora (sprzężenia stanu) i estymatora to problemy *dualne*, tzn. zależności wiążące:

$$\begin{array}{lll} & \mathbf{K} & \mathbf{A} \quad \mathbf{B} & \text{(regulator)} \\ \text{oraz} & \mathbf{L}^T & \mathbf{A}^T \quad \mathbf{C}^T & \text{(estymator)} \end{array}$$

są takie same. Równanie charakterystyczne równania błędu estymacji (D.9) ma postać:

$$\alpha_e(s) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})] = 0$$

Zadanie projektowania obserwatora polega na wyznaczeniu współczynników macierzy (wektora) \mathbf{L} tak, aby pierwiastki równania charakterystycznego błędu estymacji leżały w położeniach określonych przez miejsca zerowe wymagania wielomianu estymatora:

$$\alpha_e(s) = (s - \beta_1)(s - \beta_2) \dots (s - \beta_n) = 0$$

Rozwiązanie tego zadania istnieje i jest jednoznaczne, jeśli układ opisany macierzami (\mathbf{A}, \mathbf{C}) jest *obserwowalny*.

Definicja obserwowalności 1: Układ dynamiczny (\mathbf{A}, \mathbf{C}) jest *obserwowalny*, jeśli dla dowolnego stanu \mathbf{x}_0 istnieje skończony przedział czasu τ taki, że \mathbf{x}_0 może być określone jednoznacznie na podstawie sterowania $\mathbf{u}(t)$ i wyjścia $\mathbf{y}(t)$ w skończonym przedziale czasu $0 \leq t \leq \tau$.

Definicja obserwowalności 2: Układ (\mathbf{A}, \mathbf{C}) jest obserwowalny, jeśli dla dowolnego wielomianu $\alpha_e(s)$ n -tego stopnia istnieje jednoznacznie określone sprzężenie estymatora \mathbf{L} takie, że równanie charakterystyczne błędu estymacji ($\mathbf{A-LC}$) jest równe $\alpha_e(s) = 0$.

Test matematyczny obserwowalności: Macierz obserwowalności

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

musi być pełnego rzędu, tj. $\text{rank } \mathcal{O} = n$.

Obliczenie \mathbf{L} jest najprostsze dla tzw. *kanonicznej formy obserwatora* macierzy \mathbf{A}, \mathbf{C} .

Metody określania położenia biegunów estymatora

Metoda 1: Pole placement (jak dla wielomianu układu zamkniętego $\alpha_d(s)$)

Dynamika estymacji powinna być kilka razy szybsza niż dynamika regulacji, więc w celu zapewnienia szybkiego zanikania błędu $\tilde{\mathbf{x}}$ projektuje się estymator o pulsacji nominalnej $\omega_{0e} \approx 3 \div 6 \omega_{0c}$, np. metodą prototypowania ITAE lub Bessela.

Jeżeli szumy pomiarowe w układzie odgrywają istotną rolę, to estymator może być wolniejszy niż $3\omega_{0c}$, żeby je wygładzić (wolniejszy estymator lepiej filtruje pomiary).

Niemierzalne szумы pomiarowe są uwzględniane w równaniu wyjścia:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

- Jeżeli szum pomiarowy \mathbf{v} jest duży, należy zastosować słabe sprzężenie od błędu estymacji wyjścia $\mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$ i polegać bardziej na modelu obiektu (małe \mathbf{L} , wolny estymator).
- Jeśli zakłócenie \mathbf{z} działające na obiekt jest znaczne, model obiektu w estymatorze jest mało użyteczny, ponieważ nie uwzględnia zakłócenia (zakłócenie jest charakteryzowane przez macierz \mathbf{B}_z) i lepiej polegać bardziej na pomiarach stosując silne sprzężenie $\mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$ (duże \mathbf{L} , szybki estymator).

Kiedy współczynniki wielomianu charakterystycznego obserwatora $\alpha_e(s)$ są już określone, do określenia wzmacnienia sprzężenia estymatora stosuje się wzór Ackermanna:

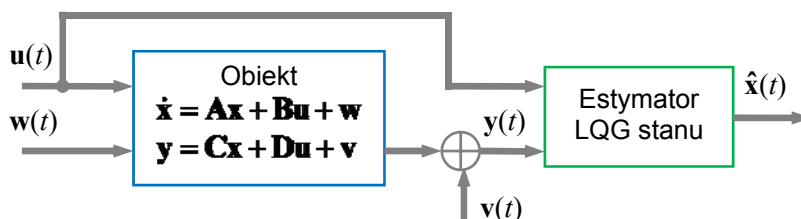
$$\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{A})\mathbf{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \alpha_e(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{e(n-1)}\mathbf{A}^{n-1} + \alpha_{e(n-2)}\mathbf{A}^{n-2} + \dots + \alpha_{e0}\mathbf{I}$$

Metoda 2: Estymacja LQG (*Linear Quadratic Gaussian*)

Przy projektowaniu estymatora stanu bierze się pod uwagę, że pomiary wyjścia \mathbf{y} są zakłócone szumem pomiarowym \mathbf{v} oraz że na dynamikę obiektu wpływa losowe zakłócenie wejściowe \mathbf{w} . Model obiektu z uwzględnieniem takich niemierzonych zakłóceń ma postać:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{w}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{v}$$



Rys. D.5. Obiekt z zakłóceniami losowymi \mathbf{w} i \mathbf{v} na wejściu i wyjściu oraz estymator LQG oparty na zaszumionym wyjściu \mathbf{y}

Równanie dynamiki błędu estymatora stanu z uwzględnieniem modelu zakłóceń przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{w}) - [\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\underbrace{\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{v}}_{\mathbf{y}}) - \underbrace{\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}}_{\hat{\mathbf{y}}}] \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{w} - \mathbf{L}\mathbf{v} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Zwróćmy uwagę, że model w obserwatorze *nie zawiera* składników zawierających niemierzone zakłócenia losowe. Ze względu na oddziaływanie tych zakłóceń na obiekt błąd estymacji w ogólności nie jest zbieżny do zera, ale przez odpowiedni wybór macierzy wzmacnień \mathbf{L} estymatora można go utrzymać na niskim poziomie. Zagadnienie LQG polega na znalezieniu macierzy \mathbf{L} , która minimalizuje ustaloną wartość oczekiwanej kowariancji błędu estymacji:

$$J_{LQG} = \lim_{t \rightarrow \infty} E[\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t)], \quad (\text{D.11})$$

przy założeniu, że $\mathbf{w}(t)$ i $\mathbf{v}(t)$ są wektorami wzajemnie niezależnych losowych procesów Gaussowskich o zerowej średniej i (dodatnio określonych i symetrycznych) macierzach kowariancji:

$$E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)] = \mathbf{Q}_w, \quad E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)] = \mathbf{R}_v, \quad E[\mathbf{w}(t)\mathbf{v}^T(t)] = \mathbf{0}$$

Ze względu na dualność problemu projektowania regulatora LQR i estymatora LQG macierze kowariancji szumów \mathbf{Q}_W i \mathbf{R}_V pełnią we wskaźniku J_{LQG} taką analogiczną rolę jak macierze wagowe \mathbf{Q}_X i \mathbf{R} we wskaźniku J_{LQR} . Wartości ich współczynników są parametrami projektowymi LQG.

Często wybiera się \mathbf{Q}_W i \mathbf{R}_V , w których niezerowe są tylko współczynniki diagonalne Q_{Wii} i R_{Vjj} reprezentujące szacowane wariancje szumów odpowiednio $w_i(t)$ na wejściu i $v_j(t)$ na wyjściu. Przy braku informacji na temat poziomu szumów te szacowane wariancje są zwykle wartościami proporcjonalnymi do kwadratu zakresu zmienności odpowiednich zmiennych stanu i mierzonych wyjść. Rozwiązaniem zagadnienia LQG, minimalizującym wskaźnik J_{LQG} , jest macierz optymalnych wzmocnień estymatora:

$$\mathbf{L}_{LQG} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}_N^{-1}$$

gdzie macierz \mathbf{P} jest jedynym dodatnio określonym rozwiązaniem algebraicznego równania Ricattiego:

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}_N\mathbf{G}^T - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}_N^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} = \mathbf{0}$$

Estymator stanu $\hat{\mathbf{x}}$ z optymalnym wzmocnieniem LQG:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}_{LQG}\mathbf{y}$$

jest nazywany *filtrem Kalmana* (lub *Kalmana-Bucy'ego*). Równanie dynamiki estymatora stanu zawiera składowe zależne od modelu obiektu oraz od pomiarów:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}}_{\text{zależne od modelu}} + \underbrace{\mathbf{L}\mathbf{y}}_{\text{zależne od pomiaru}} \quad (\text{D.12})$$

Właściwości estymacji LQG

- Jeżeli obiekt jest obserwowalny i sterowalny z wejścia \mathbf{w} (pomijając wejście sterowania \mathbf{u}), to optymalne sprzężenie \mathbf{L} zapewnia asymptotyczną stabilność układu zamkniętego $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$.
- Jeżeli \mathbf{R}_V jest małe w porównaniu \mathbf{Q}_W , czyli szum pomiarowy jest niewielki, optymalny estymator interpretuje znaczne odchylenie estymaty $\hat{\mathbf{y}}$ od pomiaru \mathbf{y} jako efekt niepoprawnej estymacji stanu $\hat{\mathbf{x}}$ (czyli znacznego błędu modelu wynikającego z nieuwzględnienia \mathbf{w}), która powinna być skorygowana. Taki przypadek prowadzi do dużego wzmocnienia \mathbf{L} i szybkiej estymacji opierającej się bardziej na składowej zależnej od pomiaru.
- Jeżeli \mathbf{R}_V jest duże w porównaniu \mathbf{Q}_W , optymalny estymator reaguje ostrożnie na odchylenie estymaty $\hat{\mathbf{y}}$ od pomiaru \mathbf{y} traktując je jako efekt silnego szumu pomiarowego \mathbf{v} . Taki przypadek prowadzi do małego wzmocnienia \mathbf{L} i wolnej estymacji opierającej się bardziej na składowej zależnej od modelu.

Estymator zredukowany

Jeżeli estymuje się tylko niektóre zmienne stanu, a pozostałe są bezpośrednio mierzone (stanowią wyjścia), estymator nazywa się estymatorem *zredukowanego rzędu*.

Wektor stanu dzieli się na stany mierzone \mathbf{x}_m i stany estymowane \mathbf{x}_e :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_m \\ \dot{\mathbf{x}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{mm} & \mathbf{A}_{me} \\ \mathbf{A}_{em} & \mathbf{A}_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_e \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_e \end{bmatrix}$$

Równanie stanu części estymowanej ma postać:

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{A}_{ee}\mathbf{x}_e + \underbrace{\mathbf{A}_{em}\mathbf{x}_m + \mathbf{B}_e\mathbf{u}}_{\text{mierzone wejście}}$$

Z analogicznego równania stanu części mierzonej otrzymujemy (po podstawieniu za $\mathbf{x}_m = \mathbf{C}_m^{-1}\mathbf{y}$ i jego pochodną z równania wyjścia) „równanie wyjścia” części estymowanej:

$$\underbrace{\mathbf{C}_m^{-1}\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{A}_{mm}\mathbf{C}_m^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{B}_m\mathbf{u}}_{\text{"wyjście" } \mathbf{y}_e \text{ znane z pomiaru}} = \mathbf{A}_{me}\mathbf{x}_e$$

Na podstawie powyższych równań projektuje się - jak poprzednio - estymator zredukowany wyznaczający $\hat{\mathbf{x}}_e$.

Właściwości estymatora zredukowanego w porównaniu z estymatorem pełnym:

- większe pasmo przenoszenia,
- większa czułość na szumy ze względu na brak filtracji,
- mniej skomplikowany w realizacji.

Nawet jeżeli pewne zmienne stanu są mierzone, to w przypadkach kiedy pomiary są niepewne (zakłócone), stosuje się estymator pełnego rzędu, ponieważ estymaty stanu są bardziej odporne na zakłócenia (podlegają filtracji) niż bezpośrednie pomiary.

D.5. Połączenie sprzężenia stanu i obserwatora (sprzężenie wyjścia)

Równania dynamiki układu zamkniętego z regulatorem oraz dynamiki estymator mają postać:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

Po połączeniu wektora stanu \mathbf{x} i jego estymaty $\hat{\mathbf{x}}$ otrzymujemy układ rozszerzony z dynamiką obserwatora:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{L}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

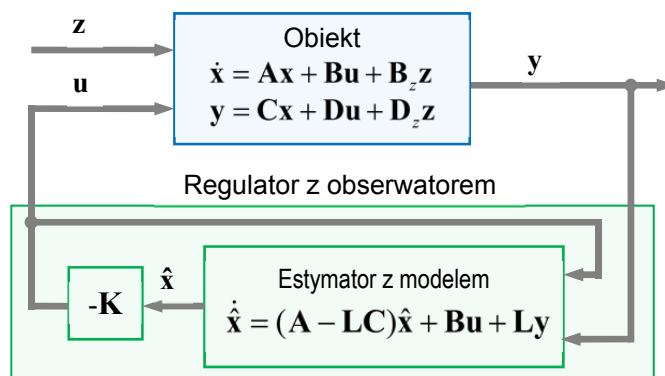
Zasada separacji: Zbiór wartości własnych (pierwiastków równania charakterystycznego) połączenia pełnego sprzężenia stanu oraz estymatora stanu to suma wartości własnych macierzy stanu tych podukładów, tj. $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ oraz $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$. Sprzężenie stanu i estymator mogą być projektowane niezależnie, a następnie połączone, tj. $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$. Jeżeli każdy z tych podukładów jest asymptotycznie stabilny, to stabilny jest również układ zamknięty z obserwatorem.

Zasadę separacji widać szczególnie dobrze, jeżeli rozważymy układ rozszerzony z dynamiką błędu estymacji $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, zamiast samej estymaty $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \cdot \det(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) \quad (\text{D.14})$$

Pełny układ regulacji ze sprzężeniem wyjścia (bez sygnału zadanego) i regulatorem zawierającym estymator stanu oparty na modelu obiektu oraz macierz sprzężenia stanu jest pokazany na Rys. D.6.



Rys. D.6. Pełna struktura układu regulacji ze sprzężeniem wyjścia z regulatorem stanowiącym połączenie estymatora i macierzy wzmocnień stanu

D.6. Wprowadzenie sygnału zadanego

Projektowanie sterowania bez sygnału zadanego daje dobre tłumienie zakłóceń i zapewnia, że wyjście sterowane $y_c \rightarrow 0$. Przyjmijmy jak poprzednio, że $y_c = y$.

Często celem regulacji jest osiągnięcie przez y_c niezerowego ustalonego punktu pracy r . Wprowadźmy x_u i u_u , dla których w stanie ustalonym (*steady state*) $y_c = y = r$.

Regulacja ze sprzężeniem stanu

Równanie sterowania ze sprzężeniem stanu:

$$u = -K(x - x_u) + u_u \quad (\text{dla } x = x_u \rightarrow u = u_u)$$

W stanie ustalonym $\dot{x} = 0$ i $y_u = r$, czyli błąd regulacji $e_u = 0$. Do równania stanu ustalonego:

$$\begin{cases} Ax_u + Bu_u = 0 \\ y_u = Cx_u + Du_u = r \end{cases}$$

podstawiamy: $x_u = N_x r$ i $u_u = N_u r$, gdzie N_x , jest macierzą $n \times l$, a $N_u - k \times l$. Po takim podstawieniu otrzymujemy następujące równanie na N_x i N_u :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Równanie to ma jednoznaczne rozwiązanie, jeżeli $k=l$, czyli liczba wejść sterujących jest równa liczbie sterowanych wyjść (chyba, że obiekt ma charakter różniczkujący wtedy zawsze $y \rightarrow 0$):

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (D.15)$$

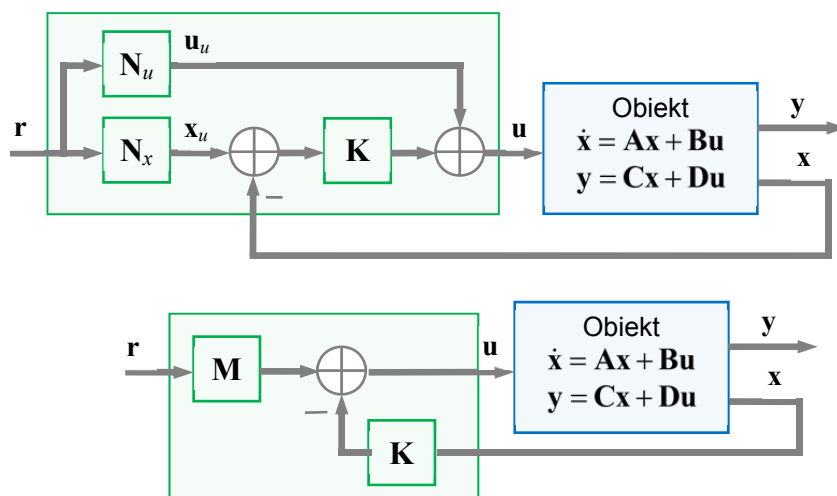
Jeżeli $k > l$ (układ *overactuated*) istnieje generalnie wiele rozwiązań. Jedno z rozwiązań ma postać:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C_c & D_c \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C_c & D_c \end{bmatrix}^T \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Jeżeli $k < l$ (układ *underactuated*) równanie ma rozwiązanie tylko dla pewnych wartości r .

Regulacja ze sprzężeniem stanu dająca w stanie ustalonym $y = r$ dla dowolnego r (zakładając, że model w regulatorze jest dokładny) jest opisana równaniem:

$$u = N_u r - K(x - N_x r) = -Kx + \underbrace{(N_u + KN_x)}_M r = -Kx + \bar{N}r \quad (D.16)$$



Rys. D.7. Równoważne struktury regulatora z sygnałem zadanym i sprzężeniem stanu

Regulacja ze sprzężeniem wyjścia i obserwatorem

Do równania dynamiki estymatora zamiast \mathbf{x} i \mathbf{y} (jak przy $\mathbf{r}=0$) wstawiamy odchylenia od stanu ustalonego $\mathbf{x}_e = \mathbf{x} - \mathbf{x}_u$ i $\mathbf{y}_e = \mathbf{y} - \mathbf{y}_u$, które mają dążyć do zera. Wtedy:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_e = (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}_e + \mathbf{L}\mathbf{y}_e$$

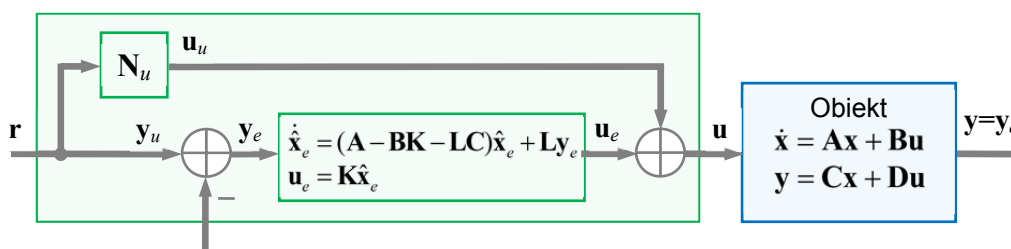
Dostępna w regulatorze estymata odchylenia $\hat{\mathbf{x}}_e = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_u$, i równanie sterowania przyjmuje postać:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}_e + \mathbf{u}_u$$

W przypadku, kiedy $\mathbf{y}_c = \mathbf{y}$, mamy $\mathbf{C}\mathbf{x}_u = \mathbf{y}_u = \mathbf{r}$ i $\mathbf{C}\mathbf{N}_u = \mathbf{I}$. Jeżeli obiekt zawiera *integrator*, to $\mathbf{N}_u = \mathbf{0}$ i mamy zwykle pełne sprzężenie zwrotne. Pełne równania układu zamkniętego i wyjścia sterowanego mają postać:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{LC} & \mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{N}_u \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} \mathbf{r},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}(\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}_e + \mathbf{u}_u) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{DK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}}_e \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{N}_u \mathbf{r}$$
(D.17)

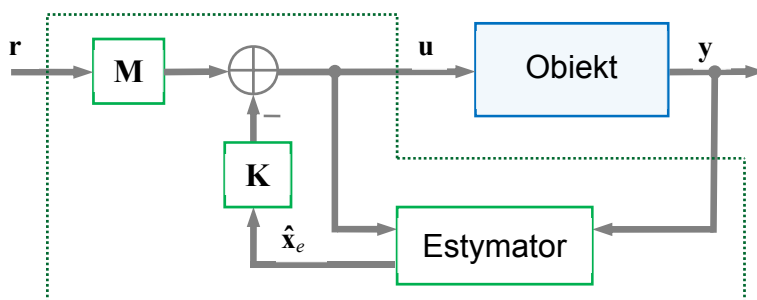


Rys. D.8. Struktura regulatora z sygnałem zadanym, sprzężeniem wyjścia i obserwatorem

W układzie regulatora z obserwatorem istnieją dwa sposoby wprowadzenia sygnału zadanego \mathbf{r} .

1) Regulator w torze sprzężenia zwrotnego

Sterowanie \mathbf{u} jednakowo pobudza obiekt i estymator (rys. D.9). Transmitancja od \mathbf{r} do \mathbf{y} musi mieć zera w położeniach biegunów estymatora i kasuje je. Konfiguracja ta daje często lepsze efekty.

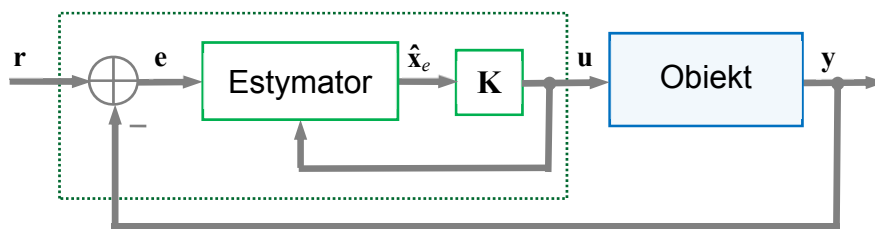


Rys. D.9. Regulator z estymatorem w torze sprzężenia zwrotnego

2) Regulator w torze głównym

Jest to klasyczna konfiguracja z błędem regulacji (rys. D.10). Sygnał zadany \mathbf{r} pobudza bezpośrednio tylko estymator powodując zanikający błąd estymacji. Dynamika estymatora dodaje się do dynamiki regulatora (połączenie szeregowo). Wielomian charakterystyczny układu regulacji to iloczyn wielomianów obiektu ze sprzężeniem stanu i estymatora, a równanie charakterystyczne:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \cdot \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}) = 0$$



Rys. D.10. Regulator z estymatorem w torze głównym

D.7. Wprowadzenie do regulatora działania całkującego

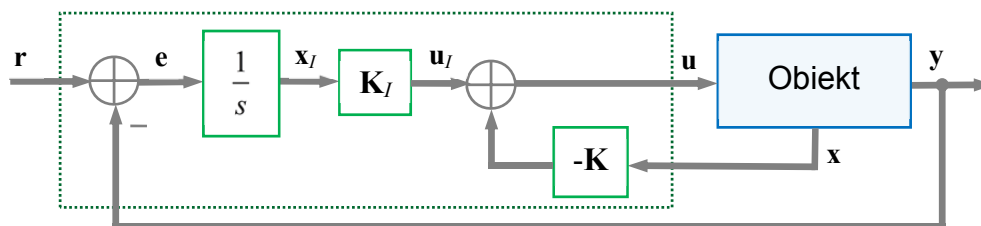
Wprowadzenie działania całkującego w układzie regulacji uzyskuje się (o ile obiekt nie ma zera w początku układu) przez rozszerzenie wektora stanu o dodatkowy stan całkujący dla każdej składowej wektora błędów regulacji e o wymiarze l_c równym liczbie wyjść podlegających sterowaniu.

Przyjmijmy, że $y_c = y$ (w przeciwnym razie trzeba wprowadzić wzmocnienie M jak we wzorze (D.16) i na Rys. D.7). Wtedy

$$\dot{x}_I = y - r = Cx - r = e \rightarrow x_I = \int_0^t e(\tau) d\tau$$

Rozszerzone równania stanu i sprzężenia stanu przyjmują postać (K_I ma wymiar $k \times l$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad u = -\begin{bmatrix} K_0 & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} \quad (D.18)$$



Rys. D.11. Regulator z działaniem całkującym

Wewnętrzne sprzężenie stanu na Rys. D.11 można zrealizować za pomocą sprzężenia wyjścia i obserwatora jak na Rys. D.9.

D.8. Regulacja nadążna (tracking control)

Zadanie polega na zaprojektowaniu regulacji mającej zapewnić asymptotyczne nadążanie z zerowym błędem za niezaniakającym sygnałem zadanym $r(t)$ (reference / command signal) i/lub kompensacją wpływu zakłócenia $z(t)$. Sygnał zadany (lub zakłócenie) ma spełniać równanie różniczkowe:

$$r^{(n)} = \alpha_{n-1} r^{(n-1)} + \alpha_{n-2} r^{(n-2)} + \dots + \alpha_1 \dot{r} + \alpha_0 r$$

Dla sygnałów standardowych: skokowego $\rightarrow \dot{r}=0$, liniowo narastającego $\rightarrow \ddot{r}=0$, itd.

Przyjmujemy, że $y_c = y$. Wtedy model obiektu:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

Rozważmy nadążanie (kompensację) 2-go rzędu z sygnałem spełniającym równanie:

$$\ddot{r} = \alpha_1 \dot{r} + \alpha_0 r$$

Problem sprowadza się do regulacji błędów nadążania:

$$e = y - r \rightarrow \ddot{e} = \ddot{y} - \ddot{r} = C\ddot{x} + D\ddot{u} - \alpha_1 \dot{r} - \alpha_0 r$$

przy czym stabilność nadążania musi być zachowana przy perturbacji parametrów (robust control).

Zdefiniujemy następujące wektory stanu i sterowania w przestrzeni błędów:

$$\delta_x = \ddot{x} - \alpha_1 \dot{x} - \alpha_0 x$$

$$\delta_u = \ddot{u} - \alpha_1 \dot{u} - \alpha_0 u$$

Dla tak zdefiniowanych błędów zachodzi:

$$\ddot{e} - \alpha_1 \dot{e} - \alpha_0 e = \mathbf{C}\delta_x + \mathbf{D}\delta_u$$

Równanie stanu dla δ_x ma postać:

$$\dot{\delta}_x = \ddot{x} - \alpha_1 \dot{x} - \alpha_0 x = \mathbf{A}\delta_x + \mathbf{B}\delta_u$$

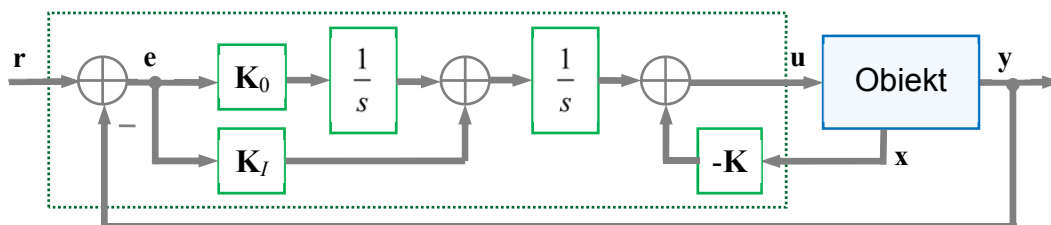
a pełne równanie stanu „układu błędu”:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \\ \dot{\delta}_x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \mathbf{C} \\ 0 & 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_e} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \delta_x \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_e} \delta_u$$

Jeżeli układ (\mathbf{A}, \mathbf{B}) jest sterowalny i wielomian charakterystyczny równania błędu $a_r(s) = s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0$ nie ma zera $s=0$, układ błędu $(\mathbf{A}_e, \mathbf{B}_e)$ jest również sterowalny i można mu nadać pożądaną dynamikę nadążania za pomocą sprzężenia stanu postaci:

$$\delta_u = -[\mathbf{K}_0 \quad \mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}] \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \delta_x \end{bmatrix}$$

Wzór na rzeczywiste sterowanie u można uzyskać po dwukrotnym scałkowaniu równania na δ_u . Sprzężenie stanu można zrealizować – jak poprzednio - za pomocą sprzężenia wyjścia i obserwatora.



Rys. D.12. Regulator nadążny 2-go rzędu (nadąża np. za sygnałem liniowo narastającym) z wewnętrznym modelem (*internal model*) sygnału zadanego