

Wydział Elektryczny
Zespół Automatyki (ZTMAiPC)

LABORATORIUM TEORII STEROWANIA

Ćwiczenie 2 CF

Charakterystyki częstotliwościowe układów dynamicznych

1. Cel ćwiczenia

- Zapoznanie się z charakterystykami częstotliwościowymi podstawowych członów dynamicznych.
- Przeprowadzenie pomiarów charakterystyk częstotliwościowych członów zrealizowanych w formie obwodów elektrycznych.
- Nabycie umiejętności wyznaczania parametrów transmitancji członów na podstawie charakterystyk częstotliwościowych.

2. Podstawy teoretyczne

Jedną z podstawowych metod określania właściwości układów dynamicznych jest wyznaczanie ich charakterystyk częstotliwościowych. Charakterystyka częstotliwościowa opisuje odpowiedź układu na *wymuszenie harmoniczne* (sinusoidalne) o częstotliwości zmieniającej się w określonym zakresie (charakter fizyczny sygnału wejściowego i wyjściowego może być różny).

Sygnał harmoniczny jest szczególnie przydatny jako sygnał testowy z kilku powodów:

- każdy sygnał (skończony lub okresowy) może być wyrażony jako *suma sygnałów sinusoidalnych o różnych częstotliwościach* (rozkład sygnału na szereg Fouriera),
- odpowiedź stacjonarnego stabilnego układu liniowego na wymuszenie sinusoidalne jest sinusoidą o tej samej częstotliwości,
- przebieg sinusoidalny jest łatwy do wygenerowania,
- sygnały robocze w wielu układach są (przynajmniej w pewnym zakresie) harmoniczne.

Dwa pierwsze fakty wskazane powyżej oraz zasada superpozycji sprawiają, że *odpowiedź liniowego układu stacjonarnego na dowolne wymuszenie można wydedukować na podstawie jego charakterystyki częstotliwościowej* (dla przykładu, jakość sygnału wyjściowego wzmacniacza audio ocenia się na podstawie jego charakterystyki częstotliwościowej, chociaż sygnały dźwiękowe nie są sinusoidalne). Przebieg charakterystyki częstotliwościowej dostarcza w praktyce więcej informacji na temat zachowania się układu w różnych warunkach niż pojedyncza charakterystyka czasowa (np. odpowiedź impulsowa), chociaż w sensie teoretycznym są one równoważne.

2.1. Charakterystyka amplitudowa i fazowa

Jeżeli na wejście liniowego układu dynamicznego podamy sygnał sinusoidalny

$$x(t) = X_m \cos(\omega t - \phi_x) \quad (2.1)$$

to *po zaniknięciu procesów przejściowych* na wyjściu układu otrzymamy również sygnał sinusoidalny

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t - \phi_y) \quad (2.2)$$

o tej samej częstotliwości kołowej (pulsacji) $\omega = 2\pi f$ [rad/s], ale w ogólności o innej amplitudzie i fazie (Rys.2.1), przy czym zmiana amplitudy i fazy sygnału po przejściu przez układ jest różna dla różnych

wartości ω . Jeżeli zmiany amplitudy i fazy zarejestruje się dla wejściowego sygnału harmonicznego o częstotliwości nastawianej w szerokim zakresie (teoretycznie w zakresie $0 \leq \omega \leq \infty$), to otrzymamy **charakterystyki częstotliwościowe** układu:

- **charakterystyka amplitudowa** $A(\omega)$ jest to stosunek amplitudy sygnału wyjściowego do amplitudy sygnału wejściowego (*wzmocnienie* układu) w funkcji częstotliwości ω :

$$A(\omega) = \frac{Y_m(\omega)}{X_m(\omega)} \quad (2.3)$$

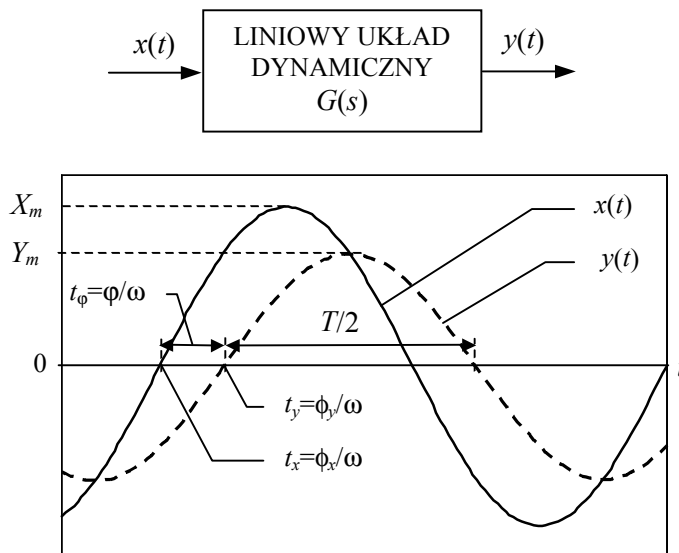
- **charakterystyka fazowa** $\varphi(\omega)$ jest to *przesunięcie fazowe* (podawane w stopniach lub radianach) sygnału wyjściowego w stosunku do sygnału wejściowego w funkcji częstotliwości ω :

$$\varphi(\omega) = \phi_x(\omega) - \phi_y(\omega) \quad (2.4)$$

Jeżeli sygnał wyjściowy jest *opóźniony* w stosunku do wejściowego (jak na Rys.2.1), to przesunięcie fazowe $\varphi(\omega)$ ma wartość *ujemną*.

Jednostki wzmocnienia zależą od tego, w jakich jednostkach wyrażane są wartości sygnałów. Jeżeli wielkością wyjściową jest np. temperatura, a wejściową napięcie, to wzmocnienie może być podawane w $[^{\circ}\text{C}/\text{V}]$.

Przy zdejmowaniu charakterystyki częstotliwościowej amplituda sygnału wejściowego jest zwykle utrzymywana na stałym poziomie $X_m(\omega) = X_m = \text{const}$.



Rys.2.1. Sygnał harmoniczny przed i po przejściu przez liniowy układ dynamiczny. Przesunięcie fazowe $\varphi = t_\varphi / (T/2) \cdot 180^\circ$ jest ujemne

2.2. Związek charakterystyk częstotliwościowych z transmitancją układu

Jeżeli znany jest model matematyczny liniowego układu dynamicznego w postaci transmitancji operatorowej $G(s)$, to na podstawie $G(s)$ można wyznaczyć charakterystyki częstotliwościowe układu. W tym celu określa się tzw. **transmitancję widmową**:

$$G(j\omega) = G(s) |_{s=j\omega} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad (2.5)$$

Transmitancja widmowa jest szczególnym przypadkiem transmitancji operatorowej obliczanej na osi urojonej $s=j\omega$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej (oznacza to zastosowanie zespolonego przekształcenia Fouriera zamiast przekształcenia Laplace'a). Stosując zespolone przekształcenie

Fouriera transmitancję widmową można otrzymać bezpośrednio z charakterystyki impulsowej $g(t)$ układu:

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (2.6)$$

Transmitancję widmową jako wielkość zespoloną można przedstawić (w układzie współrzędnych biegunowych) w postaci moduł-argument:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \arg G(j\omega)} \quad (2.7)$$

Zależność modułu transmitancji widmowej $G(j\omega)$ od częstotliwości ω jest charakterystyką amplitudową układu, a zależność argumentu od częstotliwości – charakterystyką fazową:

$$\boxed{A(\omega) = |G(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg G(j\omega)} \quad (2.8)$$

Z tego względu $G(j\omega)$ nazywa się też **charakterystyką widmową** układu.

Rzeczywiście, jeżeli wejściowy sygnał harmoniczny $x(t) = X_m \cos \omega t$, to jego transformata Laplace'a $X(s) = X_m \frac{s}{s^2 + \omega^2}$. Sygnał wyjściowy $y(t) = Y_m(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$ jest przesunięty w fazie, a jego transformata $Y(s) = Y_m(\omega) \frac{s \cdot \cos \varphi(\omega) - \omega \cdot \sin \varphi(\omega)}{s^2 + \omega^2}$ (korzysta się ze znanego wzoru na cosinus sumy dwóch kątów). Przyjmując we wzorze definicyjnym $G(s) = Y(s)/X(s)$, że $s = j\omega$ i pamiętając że $\exp(jx) = \cos x + j \sin x$, otrzymujemy:

$$G(j\omega) = \frac{Y_m(\omega)}{X_m} e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.9)$$

Jeżeli charakterystykę widmową zapisze się w formie część rzeczywista-część urojona (w układzie współrzędnych prostokątnych):

$$G(j\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] + j \operatorname{Im}[G(j\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (2.10)$$

to charakterystyki częstotliwościowe określone są zależnościami:

$$\boxed{A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}} \quad (2.11)$$

Ze względu na tłumienie charakterystyki układów rzeczywistych dążą do początku układu współrzędnych $G(j\omega) \rightarrow 0$ dla $\omega \rightarrow \infty$.

Jeżeli układ dynamiczny jest **minimalnofazowy**, tzn. wszystkie zera opisującej go transmitancji $G(s)$ leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s , to charakterystyki amplitudowa i fazowa układu są ze sobą powiązane. Stanowią one odpowiednio część rzeczywistą i część urojoną funkcji

$$\ln G(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega) \quad (2.12)$$

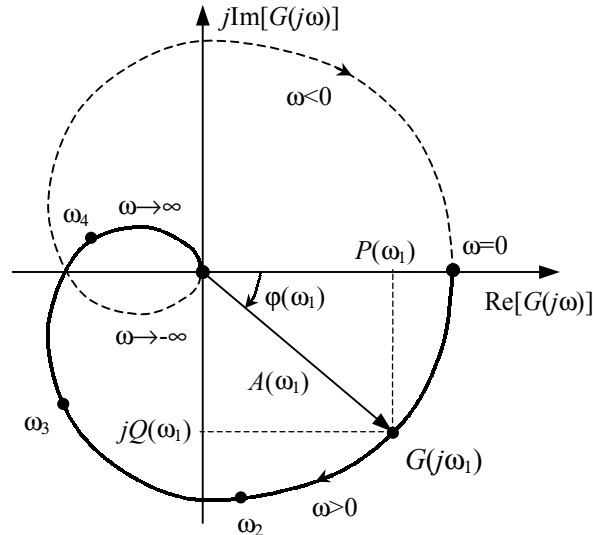
gdzie $\ln A$ jest wzmocnieniem wyrażanym w *neperach*. Charakterystyki amplitudowej i fazowej układu minimalnofazowego nie można kształtować niezależnie od siebie.

2.3. Sposoby wykreślania charakterystyk częstotliwościowych

Pierwszym ze sposobów przedstawiania właściwości częstotliwościowych układu jest wykres parametryczny (względem parametru ω) jego transmitancji widmowej na płaszczyźnie zespolonej nazywany **wykresem Nyquista**. Jest on linią zakreślaną na płaszczyźnie zespolonej przez koniec wektora $G(j\omega)$ przy zmianie ω od 0 do ∞ (tzw. *hodograf*), a jego punkty spełniają zależności (2.8) i (2.10). Procedury komputerowe wyznaczające charakterystykę na podstawie transmitancji mogą rysować wykres również dla ujemnych wartości ω . W takim przypadku połowa wykresu dla $\omega < 0$ jest *symetrycznym odbiciem względem osi rzeczywistej* hodografu dla $\omega > 0$ (ze względu na symetrię funkcji $G(j\omega)$, Rys.2.2). Ponieważ wykres zawiera informacje zarówno o wzmocnieniu jak i o przesunięciu

fazowym, nazywa się go **charakterystyką amplitudowo-fazową**. Niejawny rozkład częstotliwości wzdłuż linii określa się przez podanie jej wartości w ważniejszych punktach (np. w punktach przecięcia wykresu z osiami współrzędnych).

Innym sposobem wykreślania charakterystyki amplitudowo-fazowej jest tzw. **wykres Nicholasa** $A=f(\varphi)$, w którym na osi OX odkłada się przesunięcie fazowe $\varphi(\omega)$, a na osi OY – wzmocnienie $A(\omega)$ w skali logarytmicznej.



Rys.2.2. Charakterystyka amplitudowo-fazowa (Nyquista) na płaszczyźnie zespolonej

Przykład 1: Transmitancja operatorowa układu RC (Rys.2.3), w którym jako sygnał wejściowy traktujemy napięcie $u_1(t)$, a jako sygnał wyjściowy napięcie $u_2(t)$, jest transmitancją członu inercyjnego I rzędu:

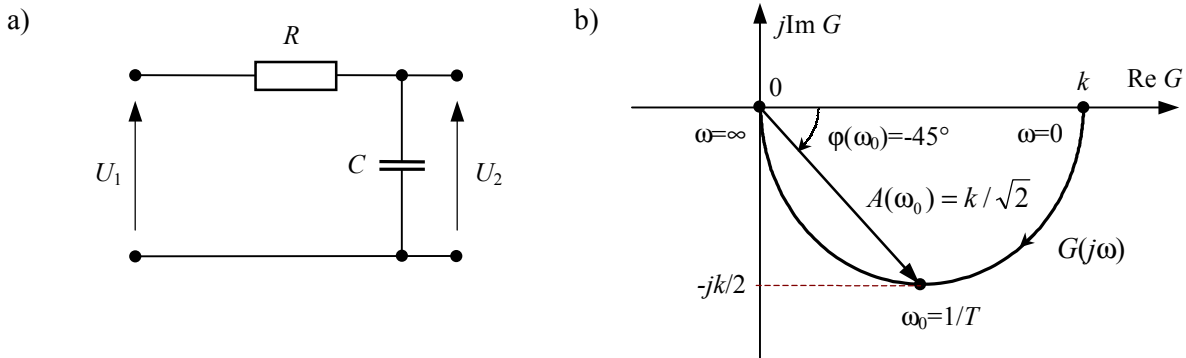
$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{k}{1 + Ts}, \quad \text{gdzie } T = RC, k = 1 \quad (2.13)$$

Transmitancja widmowa członu:

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}, \quad (2.14)$$

gdzie: $P(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}$, $Q(\omega) = \frac{-k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$. Po przejściu do układu współrzędnych biegunowych zgodnie z zależnościami (2.11) dostajemy wzory określające charakterystyki amplitudową i fazową:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{Q}{P} = -\arctg \omega T \quad (2.15)$$



Rys.2.3. a) Obwód elektryczny RC o transmitancji członu inercyjnego I rzędu ($T=RC, k=1$) i b) charakterystyka amplitudowo-fazowa Nyquista tego członu

Większe znaczenie w praktyce mają charakterystyki częstotliwościowe wyznaczone w skali logarytmicznej, nazywane **charakterystykami Bodego** (H.W. Bode – opracował metody projektowania wzmacniaczy ze sprzężeniem zwrotnym, 1945):

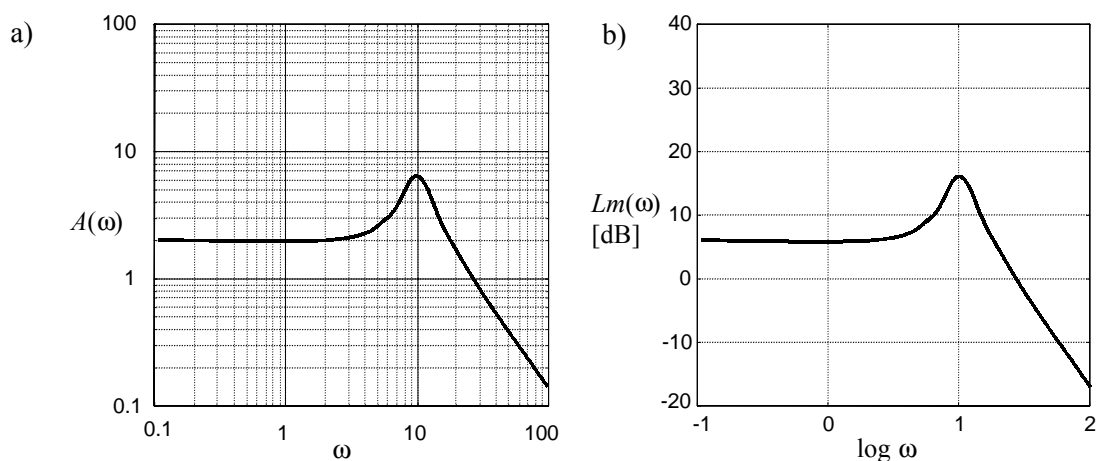
- **logarytmiczna charakterystyka amplitudowa** $Lm(\omega)$ (logarytmiczny moduł wzmocnienia) jest określona zależnością:

$$Lm(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad (2.16)$$

i podawana w *decybelach* [dB] wzmocnienia zdefiniowanego wzorem (2.3) w funkcji częstotliwości przedstawionej w skali logarytmicznej,

- **logarytmiczna charakterystyka fazowa** $\varphi(\omega)$ jest zależnością przesunięcia fazowego od częstotliwości przedstawionej w skali logarytmicznej.

Para charakterystyk Bodego przedstawia zależność logarytmu wzmocnienia i przesunięcia fazowego od częstotliwości w sposób jawny. Rys.2.4 pokazuje możliwe sposoby skalowania osi przy wykreślaniu charakterystyki logarytmicznej (bardziej czytelne jest stosowanie na osi ω skali logarytmicznej jak na wykresie a).



Rys.2.4. Równoważne sposoby skalowania osi logarytmicznej charakterystyki amplitudowej

Tabela 1. Konwersja niektórych wartości do skali logarytmicznej i decybelowej

X (skala liniowa)	0.01	0.1	1	1.41	2	3.16	5	10	31.6	100	1000
$\log X$ (skala logarytmiczna)	-2	-1	0	0.15	0.3	0.5	0.7	1	1.5	2	3
$20 \log X$ [dB]	-40	-20	0	3	6.02	10	14	20	30	40	60

Przykład 2: Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa członu inercyjnego I rzędu o transmitancji (2.13) jest określona wzorem:

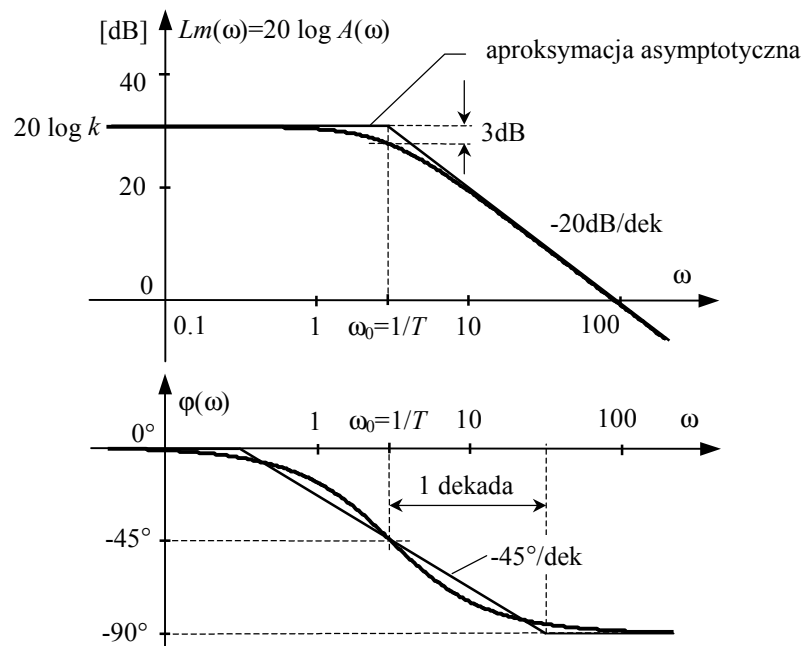
$$Lm(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = 20 \log k - 10 \log(1 + \omega^2 T^2) \quad (2.17)$$

Charakterystyka fazowa jest określana jak poprzednio, ale wykreśla się ją również z logarytmiczną skalą na osi częstotliwości. Częstotliwość $\omega_0=1/T$ nazywa się *punktem załamania* charakterystyki (Rys.2.5).

Zalety charakterystyk logarytmicznych

A. Logarytmiczna skala *wzmocnienia* umożliwia wyznaczanie charakterystyki wypadkowej układów połączonych kaskadowo (szeregowo) przez *dodawanie (algebraiczne lub graficzne) charakterystyk układów składowych*. Rzeczywiście, jeżeli charakterystyki widmowe układów składowych oznaczymy przez $G_1(j\omega)$ i $G_2(j\omega)$, to charakterystyka wypadkowa

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) = |G_1| \cdot |G_2| \cdot \exp j(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (2.18)$$



Rys.2.5. Logarymiczne charakterystyki Bodego członu inercyjnego I rzędu

Wypadkowa charakterystyka fazowa $\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$, natomiast wypadkowa logarymiczna charakterystyka amplitudowa:

$$Lm(\omega) = 20 \log |G| = 20 \log (|G_1| \cdot |G_2|) = 20 \log |G_1| + 20 \log |G_2| = Lm_1(\omega) + Lm_2(\omega) \quad (2.19)$$

B. Zalety logarymicznej skali częstotliwości stają się widoczne, kiedy rozważymy zależność (2.17) dla dużych częstotliwości $\omega \gg 1/T$. Charakterystyka amplitudowa dąży wtedy do *asymptoty*

$$20 \log A(\omega) \Big|_{\omega \gg \frac{1}{T}} = -10 \log \omega^2 T^2 = -20 \log T - 20 \log \omega \quad (2.20)$$

Jeżeli rozpatrzymy różnicę wzmacnień dla dwóch dużych częstotliwości ω_1 i ω_2 , gdzie $\omega_2 = 10 \omega_1$, to na podstawie (2.20) dostajemy:

$$20 \log A(\omega_2) - 20 \log A(\omega_1) = -20 \log \frac{\omega_2 T}{\omega_1 T} = -20 \log 10 = -20 \text{ dB} \quad (2.21)$$

Nachylenie charakterystyki amplitudowej dąży więc asymptotycznie do wartości stałej równej -20 dB na dekadę, gdzie **dekadą** nazywa się *dziesięciokrotną różnicę* częstotliwości.

Zadanie: Sprawdzić, że nachylenie charakterystyki amplitudowej dla $\omega \gg 1/T$ wynosi -6 dB na oktawę, gdzie **oktawą** nazywa się *dwukrotną różnicę* częstotliwości.

Właściwość ta jest ogólna: *logarymiczna charakterystyka amplitudowa dowolnego układu liniowego w miarę oddalania się od punktów załamania ma przebieg asymptotycznie liniowy*. Wykorzystuje się to stosując aproksymacje rzeczywistych charakterystykami odcinkami liniowymi złożonymi z części asymptot. Błąd aproksymacji taką tzw. *charakterystyką asymptotyczną* jest największy w punktach załamania i dla pojedynczego czynnika $(j\omega T + 1)$ wynosi 3 dB (wzmocnienie różni się $\sqrt{2}$ razy), a w odległości oktawy od najbliższego punktu załamania wynosi ok. 1 dB . Jeżeli punkt załamania odpowiada kilku jednakowym stałym czasowym, to błędy aproksymacji są proporcjonalnie większe.

Do przybliżonej analizy stosuje się również odcinkami liniowe aproksymacje przebiegu charakterystyki fazowej. Najpopularniejsza z metod polega na wytyczeniu odcinka o nachyleniu $45^\circ/\text{dek}$ przechodzącego przez punkt przegięcia charakterystyki fazowej (odpowiadający punktowi załamania asymptotycznej charakterystyki amplitudowej, Rys.2.5) i rozciągającego się jedną dekadę w obie strony od tego punktu. Maksymalny błąd takiej aproksymacji wynosi ok. 6° .

2.4. Charakterystyki częstotliwościowe podstawowych członów dynamicznych

2.4.1. Człon proporcjonalny (wzmacniacz idealny) $G(s) = k$

Charakterystyka widmowa $G(j\omega) = k$ ($P(\omega) = k, Q(\omega) = 0$) ogranicza się do *jednego punktu* na płaszczyźnie zespolonej. Charakterystyki Bodego mają wartości stałe:

$$20 \log A(\omega) = 20 \log k = \text{const}, \quad \varphi(\omega) = 0 \quad (2.22)$$

2.4.2. Człon inercyjny I rzędu

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts}$$

Charakterystyki częstotliwościowe Nyquista i Bodego czlonu inercyjnego zostały wyznaczone w przykładach 1 i 2 (patrz Rys.2.3 i Rys.2.5).

2.4.3. Człon całkujący

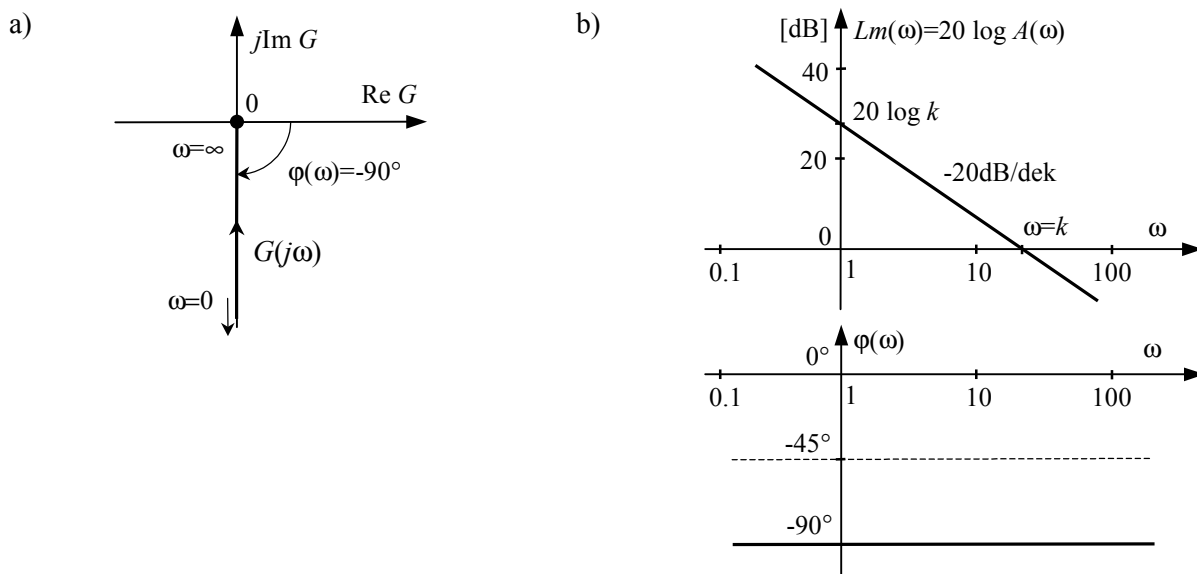
$$G(s) = \frac{k}{s}$$

Charakterystyka widmowa:

$$G(j\omega) = k / j\omega, \quad P(\omega) = 0, Q(\omega) = -k / \omega \quad (2.23)$$

Charakterystyki Bodego:

$$20 \log A(\omega) = 20 \log k - 20 \log \omega, \quad \varphi(\omega) = -\pi/2 \quad (2.24)$$



Rys.2.6. Człon całkujący: a) charakterystyka amplitudowo-fazowa Nyquista, b) charakterystyki Bodego

2.4.4. Człon całkujący z inercją

$$G(s) = \frac{k}{s(1 + Ts)}$$

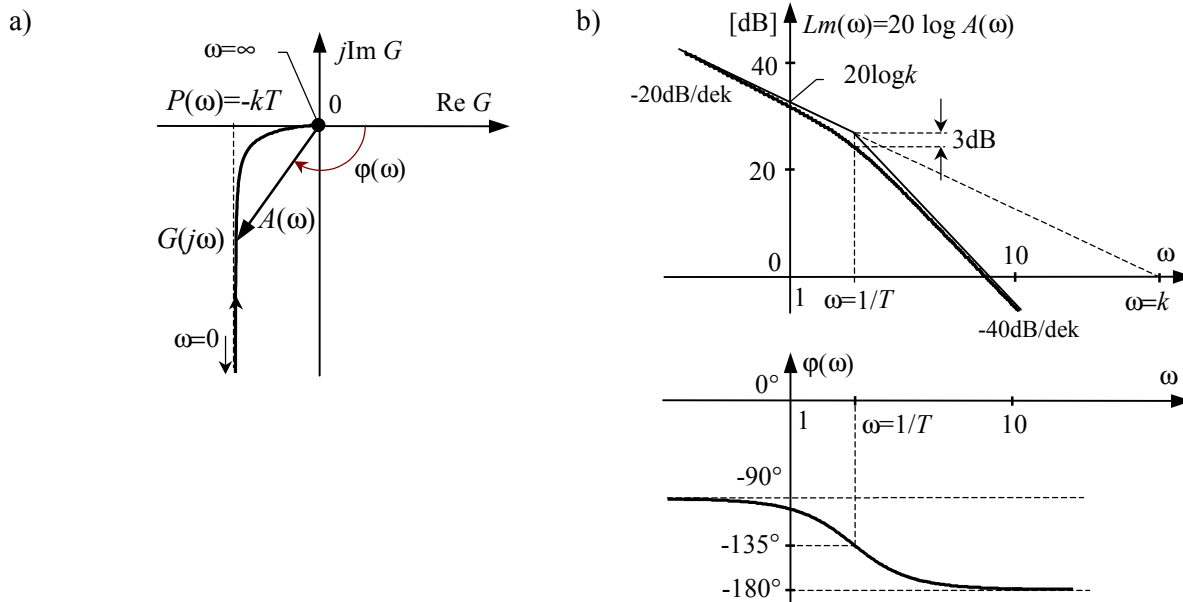
Charakterystyka widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + j\omega T)}, \quad P(\omega) = -\frac{kT}{1 + \omega^2 T^2}, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega(1 + \omega^2 T^2)} \quad (2.25)$$

Charakterystyki Bodego:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega\sqrt{1+\omega^2T^2}}, \quad 20 \log A(\omega) = 20 \log k - 20 \log \omega - 10 \log(1+\omega^2T^2) \quad (2.26)$$

$$\varphi(\omega) = -\pi + \arctg \frac{1}{\omega T} \quad (2.27)$$



Rys.2.7. Człon całkujący z inercją: a) charakterystyka amplitudowo-fazowa Nyquista, b) charakterystyki Bodego

2.4.5. Człon różniczkujący idealny

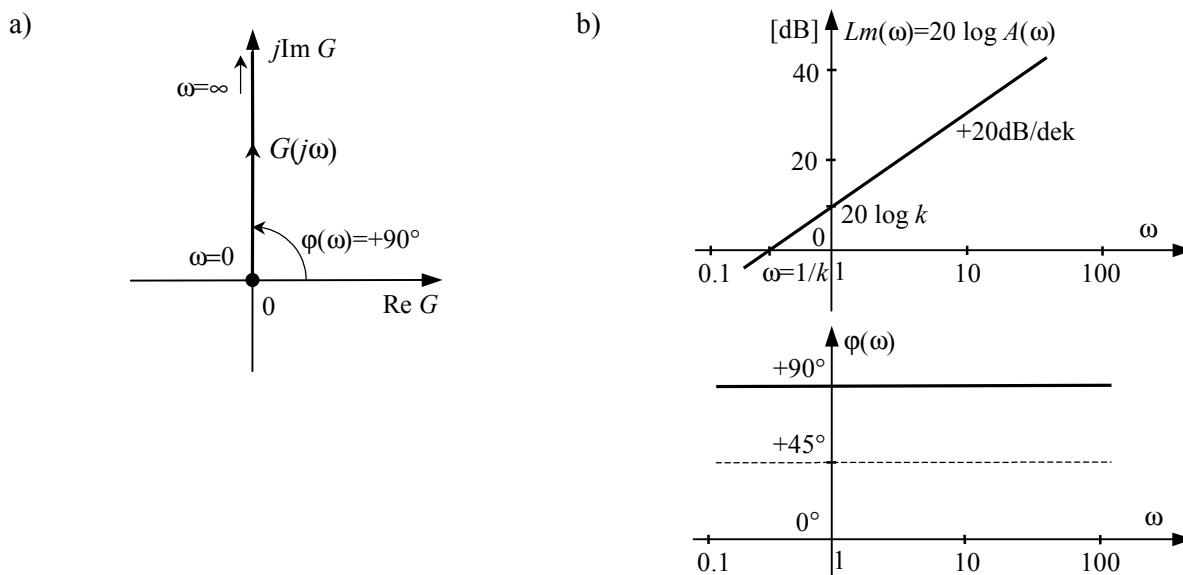
$$G(s) = k \cdot s$$

Charakterystyka widmowa:

$$G(j\omega) = jk\omega, \quad P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = k\omega \quad (2.28)$$

Charakterystyki Bodego:

$$20 \log A(\omega) = 20 \log k + 20 \log \omega, \quad \varphi(\omega) = +\pi/2 \quad (2.29)$$



Rys.2.8. Człon różniczkujący idealny: a) charakterystyka amplitudowo-fazowa Nyquista, b) charakterystyki Bodego

2.4.6. Człon różniczkujący z inercją (rzeczywisty)

$$G(s) = \frac{k \cdot s}{Ts + 1}$$

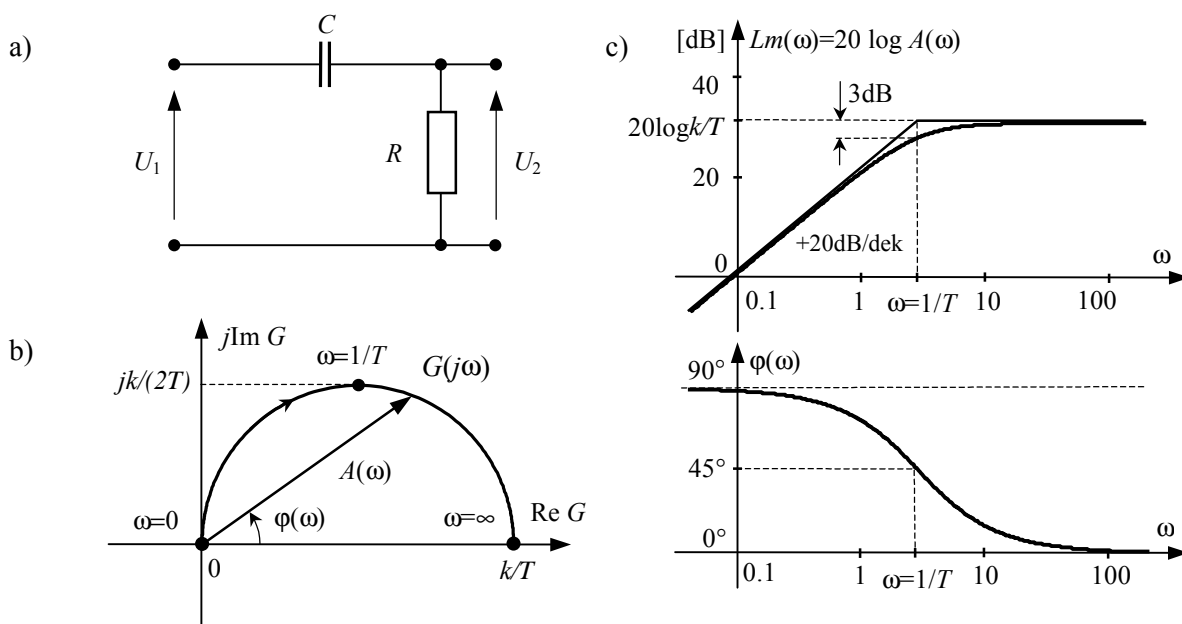
Charakterystyka widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{jk\omega}{1 + j\omega T}, \quad P(\omega) = \frac{kT\omega^2}{1 + \omega^2 T^2}, \quad Q(\omega) = \frac{k\omega}{1 + \omega^2 T^2} \quad (2.30)$$

Charakterystyki Bodego:

$$A(\omega) = \frac{k\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad 20 \log A(\omega) = 20 \log k + 20 \log \omega - 10 \log(1 + \omega^2 T^2) \quad (2.31)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega T} \quad (2.32)$$



Rys.2.9. Człon różniczkujący z inercją: a) obwód elektryczny RC ($T=k=RC$), b) charakterystyka amplitudowo-fazowa Nyquista, c) charakterystyki Bodego

2.4.7. Człony korekcyjne I rzędu

$$G(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}$$

Charakterystyka widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\alpha\omega T}, \quad P(\omega) = \frac{1 + \alpha\omega^2 T^2}{1 + \alpha^2\omega^2 T^2}, \quad Q(\omega) = \frac{\omega T(1 - \alpha)}{1 + \alpha^2\omega^2 T^2} \quad (2.33)$$

Charakterystyki Bodego:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T^2}{1 + \alpha^2\omega^2 T^2}}, \quad 20 \log A(\omega) = 10 \log(1 + \omega^2 T^2) - 10 \log(1 + \alpha^2\omega^2 T^2) \quad (2.34)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega T(1 - \alpha)}{1 + \alpha\omega^2 T^2} \quad (2.35)$$

Właściwości korekcyjne i przebiegi charakterystyk częstotliwościowych członu różnią się zasadniczo w zależności od tego czy parametr α jest większy czy mniejszy od 1. W miarę jak wartość

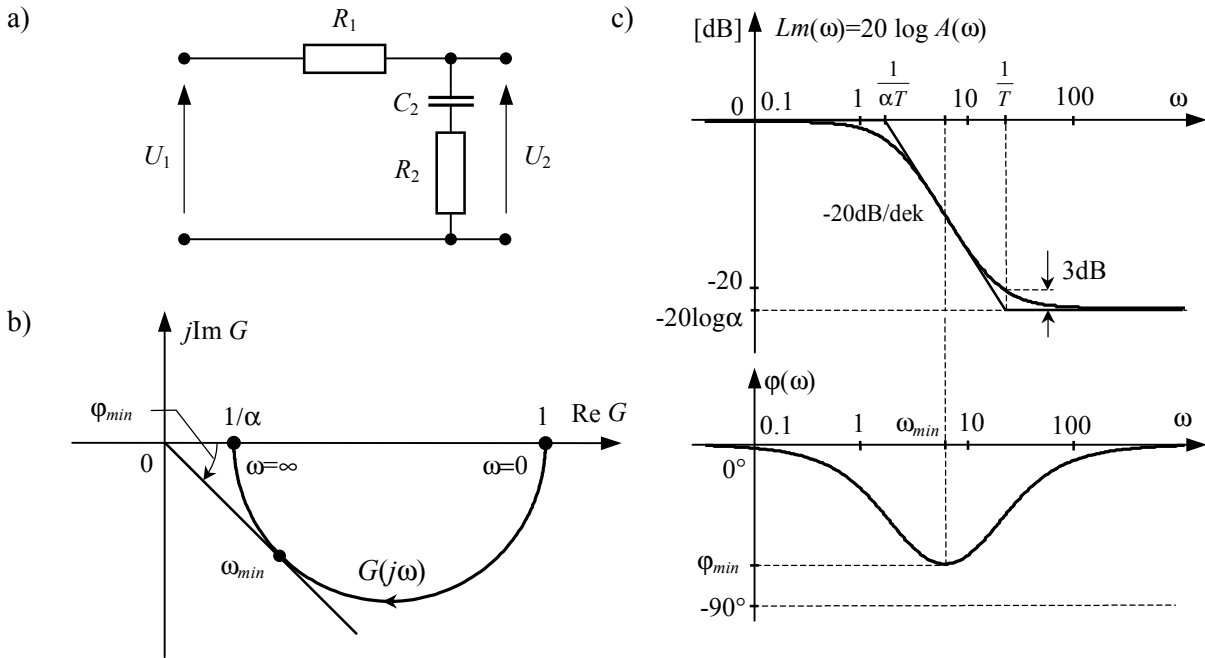
α jest coraz większa (lub coraz mniejsza) od 1 właściwości korekcyjne członu, szczególnie jeśli chodzi o wprowadzane przez człon przesunięcie fazowe, stają się coraz wyraźniejsze.

A) $\alpha > 1$ - człon opóźniający fazę (korekcja całkowa)

W zakresie częstotliwości pośrednich człon wnosi *ujemne* przesunięcie fazowe o wartości minimalnej:

$$\varphi_{min}(\omega_{min}) = \arctg \frac{1-\alpha}{\sqrt{\alpha}}, \quad \text{gdzie} \quad \omega_{min} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad (2.36)$$

W zakresie wysokich częstotliwości wzmocnienie członu jest mniejsze od 1.



Rys.2.10. Człon opóźniający fazę: a) obwód elektryczny RC ($T=R_2C_2$, $\alpha=(R_1+R_2)/R_2$), b) charakterystyka amplitudowo-fazowa Nyquista, c) charakterystyki Bodego

B) $\alpha < 1$ - człon przyspieszający (forsujący) fazę (korekcja różniczkowa)

W zakresie częstotliwości pośrednich człon wnosi *dodatnie* przesunięcie fazowe o wartości maksymalnej:

$$\varphi_{max}(\omega_{max}) = \arctg \frac{1-\alpha}{\sqrt{\alpha}}, \quad \text{gdzie} \quad \omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad (2.37)$$

W zakresie wysokich częstotliwości wzmocnienie członu jest większe od 1.

2.4.8. Człony opóźniająco-przyspieszający fazę

$$G(s) = \frac{(1 + T_1s)(1 + T_2s)}{(1 + \alpha T_1s)(1 + \frac{1}{\alpha} T_2s)}$$

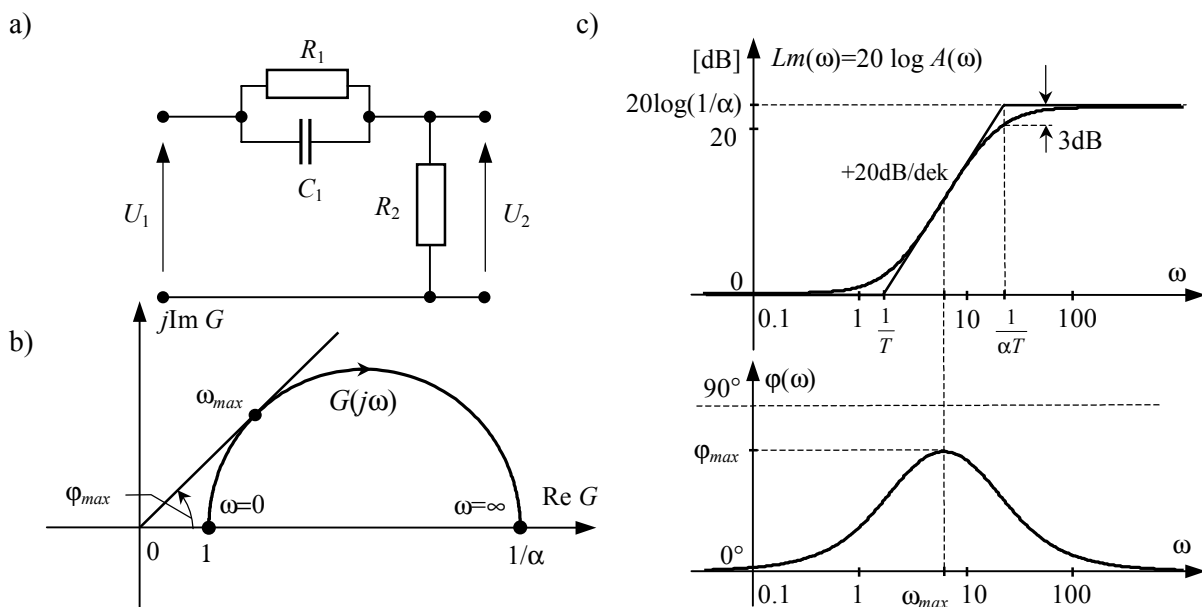
Człon ten jest szeregowym połączeniem omówionych poprzednio członów korekcyjnych I rzędu. Charakterystyka widmowa: $G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$, gdzie:

$$P(\omega) = \frac{(1 - T_1T_2\omega^2)^2 + \omega^2(T_1 + T_2)(\alpha T_1 + \frac{T_2}{\alpha})}{(1 + \alpha^2 T_1^2 \omega^2)(1 + \frac{T_2^2}{\alpha^2} \omega^2)}, \quad Q(\omega) = \frac{\omega(1 - T_1T_2\omega^2)[(T_1 + T_2) - (\alpha T_1 + \frac{T_2}{\alpha})]}{(1 + \alpha^2 T_1^2 \omega^2)(1 + \frac{T_2^2}{\alpha^2} \omega^2)} \quad (2.38)$$

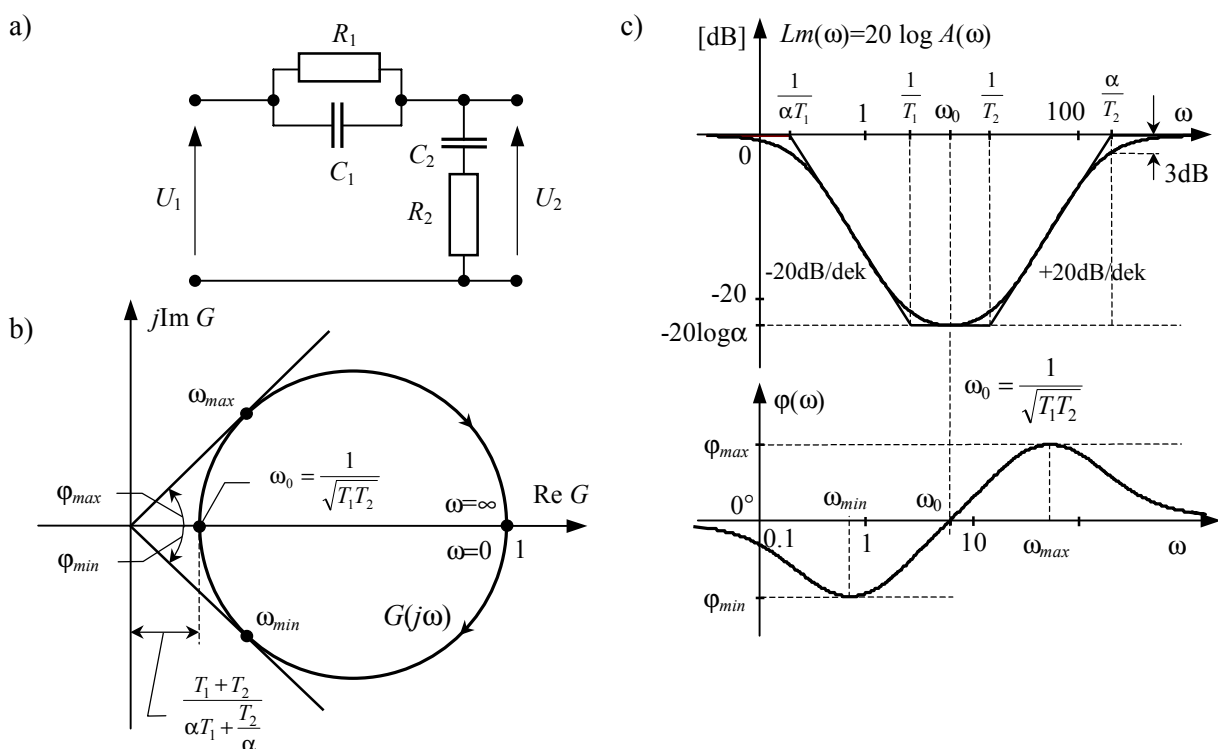
Charakterystyki Bodego:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}{(1+\alpha^2T_1^2\omega^2)(1+\frac{1}{\alpha^2}T_2^2\omega^2)}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega(1-T_1T_2\omega^2)[(T_1+T_2)-(\alpha T_1+\frac{T_2}{\alpha})]}{(1-T_1T_2\omega^2)^2 + \omega^2(T_1+T_2)(\alpha T_1+\frac{T_2}{\alpha})} \quad (2.39)$$

$$20 \log A(\omega) = 10 \log(1+T_1^2\omega^2) + 10 \log(1+T_2^2\omega^2) - 10 \log(1+\alpha^2T_1^2\omega^2) - 10 \log(1+\frac{1}{\alpha^2}T_2^2\omega^2)$$



Rys.2.11. Człon przyspieszający fazę: a) obwód elektryczny RC ($T=R_1C_1$, $\alpha=R_2/(R_1+R_2)$), b) charakterystyka amplitudowo-fazowa Nyquista, c) charakterystyki Bodego



Rys.2.12 Człon opóźniająco-przyspieszający fazę: a) obwód elektryczny RC ($T_1=R_1C_1$, $T_2=R_2C_2$, $\alpha=(R_1+R_2)/R_2 > 1$, przyjęto, że $T_1 > T_2$), b) charakterystyka amplitudowo-fazowa Nyquista, c) charakterystyki Bodego

2.4.9. Człon oscylacyjny II rzędu

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

gdzie: ζ - względny współczynnik tłumienia ($0 \leq \zeta \leq 1$)
 ω_n - częstotliwość drgań nietłumionych

Charakterystyka widmowa:

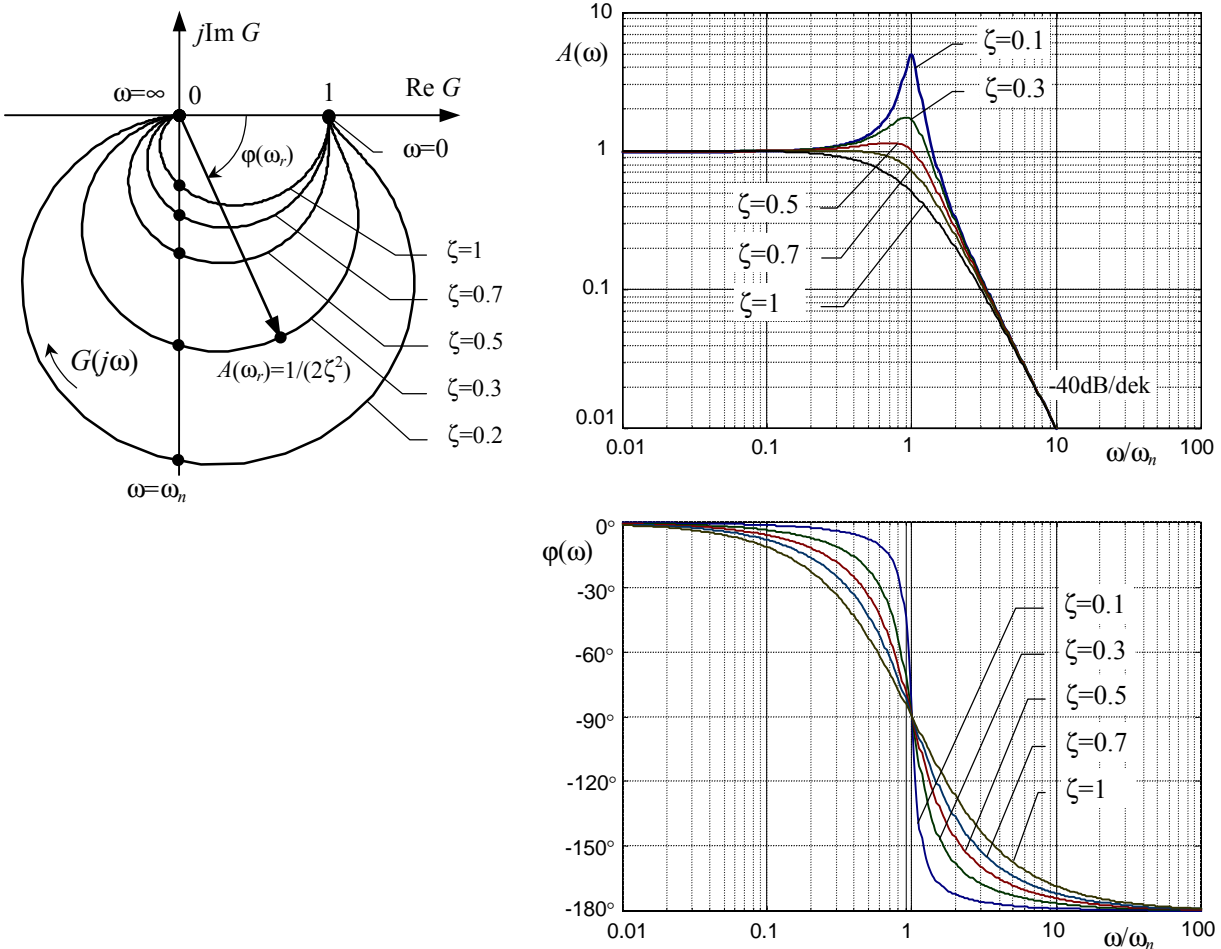
$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad P(\omega) = \frac{\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2)}{\omega^4 + \omega_n^4 + 2\omega_n^2\omega^2(2\zeta^2 - 1)}, \quad Q(\omega) = \frac{2\zeta\omega_n^3\omega}{\omega^4 + \omega_n^4 + 2\omega_n^2\omega^2(2\zeta^2 - 1)} \quad (2.40)$$

Charakterystyki Bodego:

$$A(\omega) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega^4 + \omega_n^4 + 2\omega_n^2\omega^2(2\zeta^2 - 1)}}, \quad 20 \log A(\omega) = 40 \log \omega_n - 10 \log[\omega^4 + \omega_n^4 + 2\omega_n^2\omega^2(2\zeta^2 - 1)] \quad (2.41)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (2.42)$$

Dla częstotliwości rezonansowej $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ wzmocnienie ma wartość maksymalną (tzw. *pik rezonansowy*) równą $A_r(\omega_r) = 1/(2\zeta^2)$. Jeżeli współczynnik tłumienia $\zeta \geq 1$, to człon oscylacyjny przechodzi w człon inercyjny II rzędu.



Rys.2.13. Charakterystyka amplitudowo-fazowa Nyquista członu oscylacyjnego II rzędu dla różnych wartości ζ i charakterystyki Bodego członu

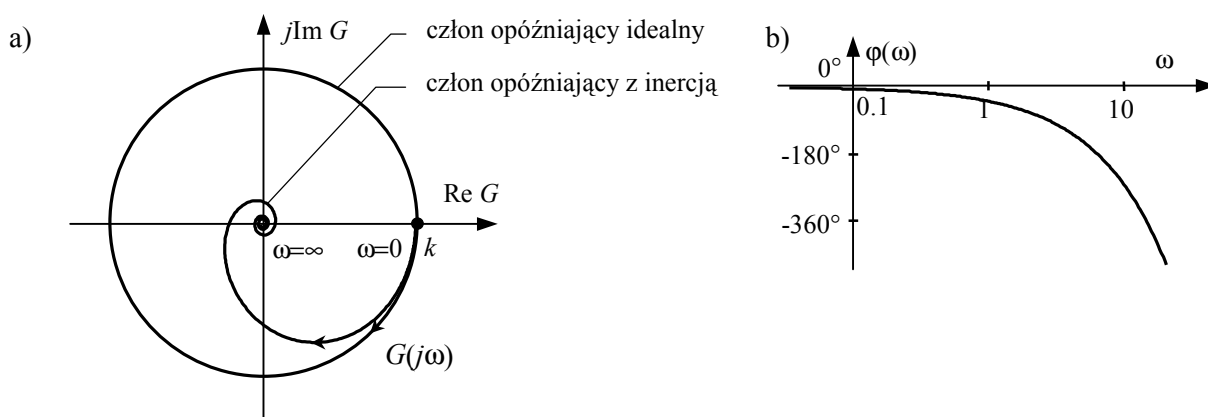
2.4.10. Człon opóźniający (opóźnienie transportowe) $G(s) = k \cdot e^{-sT_0}$

Charakterystyka amplitudowa jest taka sama jak dla członu proporcjonalnego $G(s)=k$. Opóźnienie transportowe ma wpływ tylko na przebieg charakterystyki fazowej, która jest funkcją *liniową*:

$$\varphi(\omega) = -T_0\omega \quad (2.43)$$

Charakterystyka widmowa: $G(j\omega) = k(\cos \omega - j \sin \omega) \quad (2.44)$

Ponieważ przesunięcie fazowe nie ustala się na stałej wartości przy $\omega \rightarrow \infty$ człon opóźniający zalicza się do układów *nieminimalnofazowych*. Jeżeli opóźnienie występuje w układzie, którego transmitancja widmowa $G(j\omega) \rightarrow 0$ dla $\omega \rightarrow \infty$ (co jest typowe dla układów rzeczywistych), to powoduje ono spiralne zawijanie się charakterystyki amplitudowo-fazowej Nyquista dookoła początku układu współrzędnych (Rys.2.14).



Rys.2.14. a) Charakterystyki amplitudowo-fazowe członów: opóźniającego idealnego i opóźniającego

z inercją $G(s) = \frac{ke^{-sT_0}}{Ts + 1}$, b) logarymiczna charakterystyka fazowa członu opóźniającego idealnego

2.5. Identyfikacja układu na podstawie charakterystyki częstotliwościowej

Duże znaczenie w praktyce ma problem *doświadczalnej identyfikacji* układu, którego transmitancja nie jest znana. Identyfikacja w dziedzinie częstotliwości polega na dopasowaniu zmierzonej charakterystyki częstotliwościowej układu do charakterystyki któregoś z członów podstawowych lub ich połączenia. Dla tego celu szczególnie przydatne są charakterystyki logarymiczne, których asymptotycznie liniowe przebiegi umożliwiają wychwycenie cech charakterystycznych w całym zakresie częstotliwości i określenie postaci transmitancji układu. Na podstawie punktów załamania charakterystyk asymptotycznych można z kolei łatwo wyznaczyć wartości parametrów transmitancji.

Jeżeli lewostronna (niskoczęstotliwościowa) część charakterystyki amplitudowej osiąga asymptotycznie nachylenie $-n \cdot 20\text{dB/dek}$, to w transmitancji układu występuje n członów całkujących. Zmiana nachylenia charakterystyki asymptotycznej o -20dB/dek w punkcie ω_0 oznacza występowanie inercyjnej stałej czasowej $T=1/\omega_0$ (zmiana o -40dB/dek wskazuje na obecność dwóch jednakowych lub bliskich stałych czasowych itd.). Jeżeli zmianie nachylenia o -40dB/dek towarzyszy pik rezonansowy, to w mianowniku występuje człon oscylacyjny (na podstawie wysokości pik można ocenić współczynnik tłumienia). Dodatkowo zmiany nachylenia oznaczają, że analogiczne czynniki (element różniczkujący, forsującą stałą czasową, element oscylacyjny) należy włączyć do licznika transmitancji zidentyfikowanego układu.

Poprawność analizy przebiegu charakterystyki amplitudowej powinna być zweryfikowana analizą charakterystyki fazowej.

Trafność identyfikacji jest zależna od:

- poprawnego wybrania badanego zakresu częstotliwości (w szczególności *badany przedział częstotliwości powinien zawierać wszystkie punkty załamania charakterystyki amplitudowej*) oraz dokładności pomiarów,
- dokładności aproksymacji charakterystyki doświadczalnej charakterystyką asymptotyczną.

3. Przebieg ćwiczenia

3.1. Układ pomiarowy

W ćwiczeniu zdejmowane są charakterystyki częstotliwościowe układów dynamicznych zrealizowanych w formie czwórników RC w układzie pomiarowym pokazanym na Rys.2.15. Napięcie sinusoidalne o nastawianej częstotliwości jest podawane z generatora na wejście badanego czwórnika oraz na wejścia oscyloskopów Y-T i X-Y. Do obu oscyloskopów doprowadzane jest również napięcie wyjściowe czwórnika.

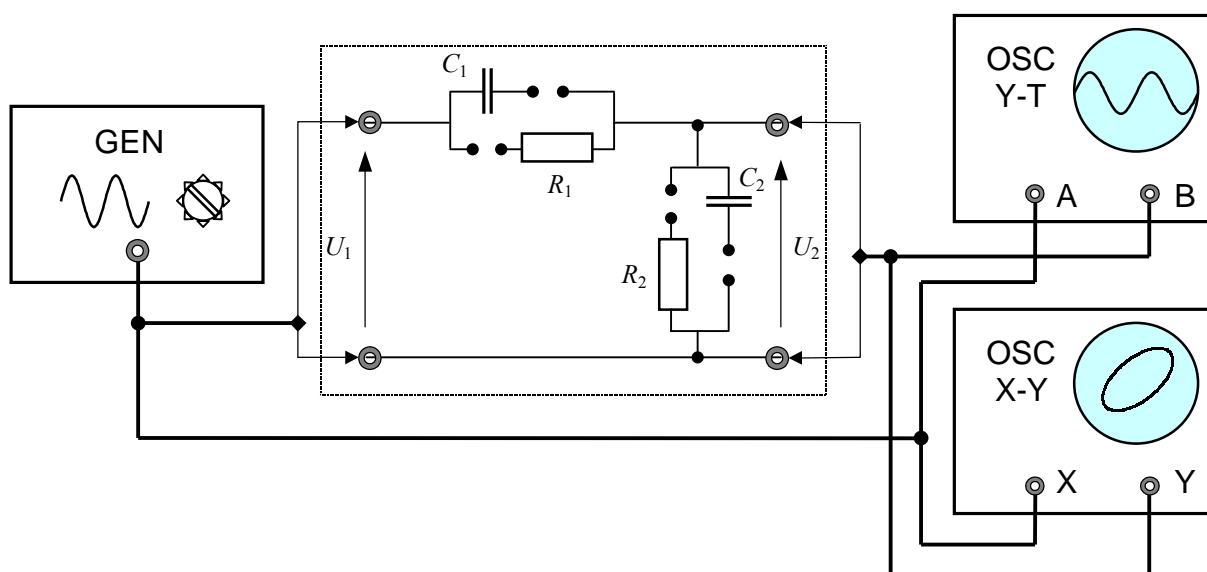
A. Pomiar charakterystyki amplitudowej

- Amplitudę napięcia wejściowego można utrzymywać przez cały czas na tym samym poziomie (w takim przypadku wystarczy zmierzyć ją tylko jeden raz).
- Wzmocnienia kanałów oscyloskopów, do których doprowadzone są sygnały, powinny być *skalibrowane*, aby odczyty odpowiadały nastawionym zakresom.
- Skalę podstawy czasu oscyloskopu Y-T należy zmieniać stosownie do zmiany częstotliwości sygnałów. W celu dokładniejszego odczytania amplitudy wygodnie jest pozostawić na ekranie oscyloskopu tylko przebieg interesującego nas kanału (przełączyć rodzaj pracy na kanał A lub B) i regulując podstawą czasu „zagęścić” przebieg tak, aby tworzył na ekranie jasne pasmo.
- Lepszą dokładność daje odczytywanie wartości międzyszczytowej, tzn. $2Y_m$ (lub $2X_m$). Jeżeli wartość ta spada (np. poniżej 20mm), należy odpowiednio zwiększyć wzmocnienie oscyloskopu i zanotować wartość z uwzględnieniem zmiany skali.

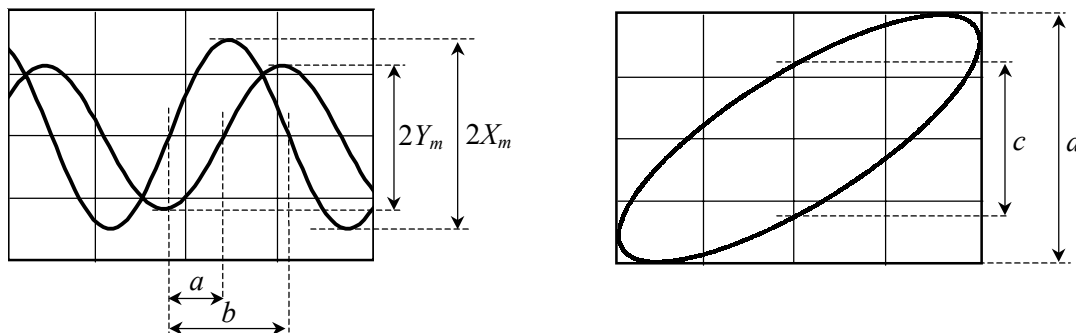
B. Pomiar charakterystyki fazowej

- Przesunięcie fazowe odczytuje się z oscyloskopu Y-T synchronizując obraz dla każdej nastawionej częstotliwości i rozwiązując proporcję $a : b = \varphi : 180^\circ$ (Rys.2.16). Oba przebiegi muszą być przy tym *symetryczne* względem osi OX i odpowiednio „rozciągnięte” na ekranie.
- Dla małych przesunięć fazowych pomiar przesunięcia sinusoid jest utrudniony. Lepsze rezultaty daje w takim przypadku obliczenie φ na podstawie kształtu elipsy Lissajous na ekranie oscyloskopu X-Y (Rys.2.16). W celu zapewnienia większej dokładności odczytów elipsa powinna być wpisana w prostokąt o możliwie dużych bokach. Ze względu na sposób odczytu bardzo ważne jest *wypośrodkowanie elipsy w poziomie*. Obraz nie powinien wykazywać zniekształceń nieliniowych. Z równań parametrycznych elipsy względem czasu (2.1)-(2.2) wynika zależność:

$$\varphi = \arcsin \frac{c}{d} \quad (2.45)$$



Rys.2.15. Układ pomiarowy do zdejmowania charakterystyk częstotliwościowych



Rys.2.16. Metody określania przesunięcia fazowego: a) oscylogram Y-T, b) oscylogram X-Y (elipsa Lissajous)

3.2. Zadania do wykonania

- Przeprowadzić połączenia elementów czwórnika według poleceń prowadzącego. Schemat połączeń badanego układu oraz wartości parametrów RC należy odnotować w protokóle z ćwiczenia.
- Przeprowadzić pomiary dla częstotliwości podanych w tabeli. W zaznaczone kolumny należy wpisywać dane z pomiarów, a następnie (przy opracowywaniu sprawozdania) na ich podstawie obliczyć wartości w pozostałych kolumnach.

f	$\omega = 2\pi f$	$\log \omega$	$2X_m$	$2Y_m$	$A = \frac{2Y_m}{2X_m}$	$Lm = 20 \log A$	a	b	$\varphi = \frac{a}{b} \cdot 180^\circ$	c	d	$\varphi = \arcsin \frac{c}{d}$
Hz	rad/s	rad/s	mm	mm	V/V	dB	mm	mm	°	mm	mm	°
20												
50												
100												
200												
500												
1000												
2000												
5000												
10000												
20000												
50000												
...												

- Przesunięcie fazowe wystarczy określić jednym z podanych sposobów. Drugi sposób należy wykorzystać do weryfikacji pomiarów w przypadkach wątpliwych.
- W tych przedziałach częstotliwości, w których istnieje podejrzenie występowania punktu załamania charakterystyki należy przeprowadzić 2-3 dodatkowe pomiary w celu poprawy dokładności identyfikacji układu.

Powyższe punkty należy powtórzyć dla wszystkich układów zadanych przez prowadzącego.

4. Opracowanie sprawozdania

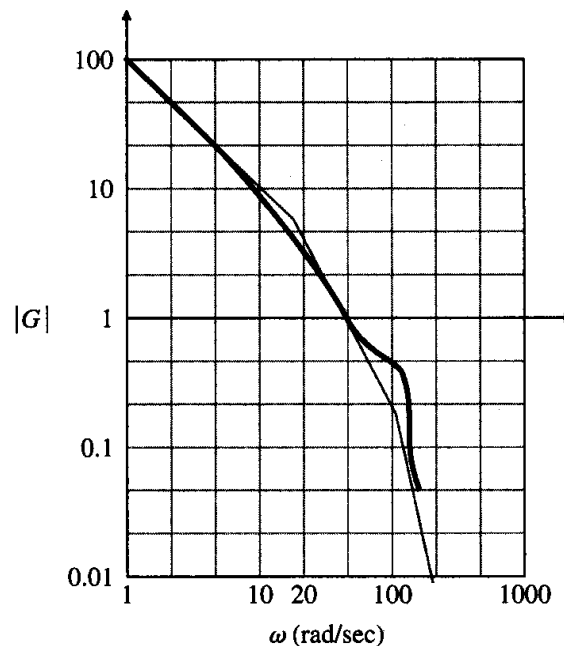
Dla każdego z badanych podczas ćwiczenia członów należy:

1. Na podstawie przeprowadzonych pomiarów wykreślić następujące charakterystyki (ciągłą linię charakterystyki należy przeprowadzić pomiędzy punktami pomiarowymi w możliwie gładki sposób):

- logarytmiczną amplitudową i fazową (wykresy Bodego),
- amplitudowo-fazową (wykres Nyquista).

2. Porównać wykreślone charakterystyki z charakterystykami członów podstawowych z pkt.2.4 i na tej podstawie określić typ członu oraz parametry jego transmitancji (współczynnik wzmocnienia k , stałą czasową T , ew. parametr α). Wartości parametrów należy określić na podstawie charakterystyk asymptotycznych dorysowanych na wykresach zmierzonych charakterystyk logarytmicznych.
3. Na podstawie znajomości schematu połączeń oraz wartości elementów RC obliczyć teoretyczną transmitancję napięciową $G(s)=U_2(s)/U_1(s)$ członu i jej parametry. Charakterystyki asymptotyczne uzyskane z obliczeń należy dorysować na wykresach wyznaczonych wcześniej.
4. Przedyskutować ewentualne rozbieżności wyników doświadczalnych i obliczeń. Ocenić uzyskaną dokładność identyfikacji członu.

Zadanie do rozwiązania: Na podstawie podanej charakterystyki amplitudowej układu wyznaczyć jego transmitancję. Wiadomo, że układ jest minimalnofazowy i że zawiera element oscylacyjny.



Literatura

1. T. Kaczorek: „Teoria układów regulacji automatycznej”, WNT, Warszawa 1974.
2. W. Pełczewski: „Teoria sterowania”, WNT, Warszawa, 1980.
3. J. Mazurek, H. Vogt, W. Żydanowicz: „Podstawy automatyki”, Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej, 1996.
4. W. Findeisen: „Technika regulacji automatycznej”, PWN, Warszawa 1978.
5. Red. W. Findeisena: „Poradnik inżyniera. Automatyka”, WNT, Warszawa 1973.

Częstochowa, 1999-2003