INSTRUKCJA

Ćwiczenie A2

Wyznaczanie współczynnika sprężystości sprężyny metodą dynamiczną.

Przed zapoznaniem się z instrukcją i przystąpieniem do wykonania ćwiczenia należy zapoznać się z następującymi zagadnieniami:

1. Prawo Hooke'a.
2. Metody wyznaczania współczynnika sprężystości.
3. Podział ciał ze względu na własności sprężyste.

WSTĘP

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodą dynamiczną wyznaczania współczynnika sprężystości sprężyny.

WSTĘP TEORETYCZNY

Ruch, w którym punkt materialny pokonuje taki sam odcinek drogi w stałych odcinkach czasu nazywamy **ruchem okresowym**. Odcinki czasu, po których następuje powtórzenie ruchu nazywamy **okresem** i oznaczamy literą **T**. Ruch okresowy, polegający na przemieszczaniu się punktu materialnego w przeciwne strony względem położenia równowagi, nazywamy **ruchem drgającym**. Ruch drgający, w którym siła wywołująca ruch jest proporcjonalna do wychylenia i posiada zwrot przeciwny do wychylenia nazywamy **ruchem harmonicznym (prostym).**

Przykładem ruchu harmonicznego może być ruch sprężyny śrubowej w zakresie małych wychyleń (rys. 1).

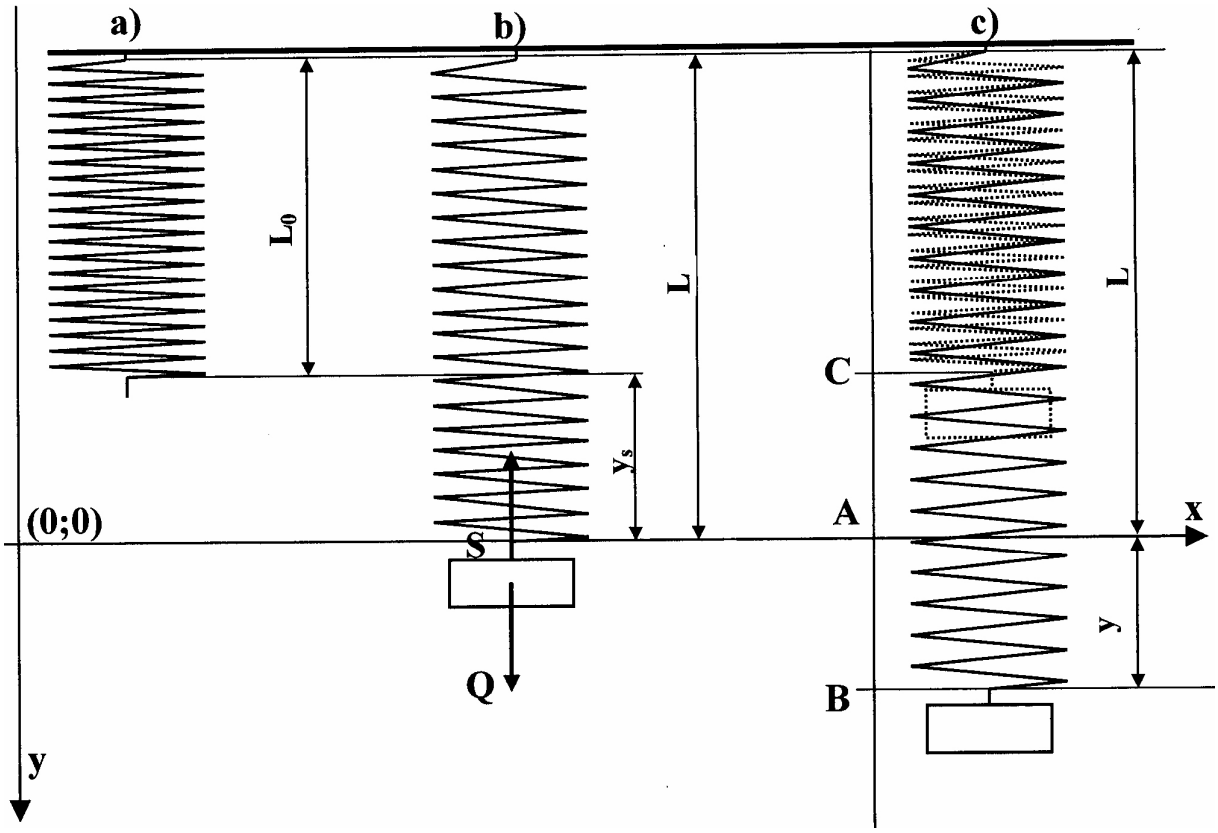
Na rysunku 1 przyjęto układ współrzędnych w taki sposób, że wszystkie wielkości skierowane w dół przyjmują wartości dodatnie, a zwrócone do góry ujemne. Układ przyjęto tak, aby początek osi **Y** znajdował się na poziomie położenia równowagi (rys 1b). Do rozważań przyjęto, że masa sprężyny jest pomijalna w porównaniu z masą ciężarka. Jak wynika z rysunku **1b**, na masę **m** w stanie równowagi działają dwie siły: siła ciężkości $\mathbf{Q = m \cdot g}$ oraz siła sprężystości sprężyny $\mathbf{S = k \cdot y_s = k \cdot \Delta L = k \cdot (L - L_0)}$, gdzie:

k – współczynnik sprężystości sprężyny,

$\mathbf{y_s}$ – wydłużenie sprężyny spowodowane masą **m**,

$\mathbf{L_0}$ – długość sprężyny w stanie swobodnym,

L – długość sprężyny po obciążeniu masą **m**.



Rys. 1 Sprężyna służąca do wyznaczania współczynnika sprężystości

a) sprężyna w stanie swobodnym, bez obciążenia,
b) sprężyna w stanie równowagi, obciążona ciężarkiem o masie **m**,
c) sprężyna obciążona ciężarkiem o masie **m** i wychylona ze stanu równowagi o wartość **z** (położenie chwilowe w czasie drgań).

W stanie równowagi zachodzi równość:

$$m \cdot g = k \cdot (L - L_0) \qquad \textbf{(1)}$$

Ponieważ $\mathbf{L - L_0 = y_s}$, to równanie **(1)** można przedstawić w postaci:

$$m \cdot g = k \cdot y_s \qquad \textbf{(2)}$$

Zależność **(1)** możemy przedstawić w postaci równania linii prostej y = a·x + b:

$$L = \frac{g}{k} \cdot m + L_0 \qquad \textbf{(3)}$$

gdzie:

L = y – rzędna równania prostej,

g – przyspieszenie ziemskie,

k – współczynnik sprężystości sprężyny,

g/k = a - współczynnik kierunkowy prostej,

m = x – odcięta równania prostej,

L_0 = b – wyraz wolny prostej.

Parametry równania **a** i **b** można w prosty sposób wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów i na tej podstawie wyliczyć wartość współczynnika sprężystości **k** oraz sporządzić wykres zależności **L(m)**.

Istnieje również inna metoda wyznaczenia współczynnika sprężystości sprężyny **k**. Załóżmy, że w stanie równowagi masa **m** znajduje się w położeniu **A**. Po jej wychyleniu do położenia **B** pojawi się siła oporu sprężystego skierowana przeciwnie do wychylenia, w kierunku położenia równowagi. Po zwolnieniu masy **m** będzie ona poruszała się w kierunku położenia równowagi, a w wyniku działania siły bezwładności minie go i przemieści się do punktu **C** w którym się na chwilę zatrzyma, a następnie ponownie wróci do punktu **B**. Masa będzie wykonywała ruch harmoniczny poruszając się między punktami zwrotnymi **B** i **C.**

Zgodnie z prawem Hooke'a (dla małych odkształceń) sprężyna oddziałuje na masę **m** siłą sprężystości:

$$S = -k \cdot \Delta L = -k \cdot \left(y_s + y\right) \qquad \textbf{(4)}$$

Ponieważ na masę **m** działa również siła ciężkości **Q = m·g**, to siła wypadkowa **F** wyrazi się wzorem:

$$F = Q + S = m \cdot g - k \cdot \left(y_s + y\right) \qquad \textbf{(5)}$$

Po uwzględnieniu zależności **(2)** otrzymujemy:

$$F = -k \cdot y \qquad \textbf{(6)}$$

Przyspieszenie masy **m** można wyrazić wzorem:

$$a_m = \frac{d^2 y}{d t^2} \qquad \textbf{(7)}$$

Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona otrzymujemy:

$$F = m \cdot a_m = m \cdot \frac{d^2 y}{d t^2} \qquad \textbf{(8)}$$

Po porównaniu wzorów **(6)** i **(8)** i przekształceniu otrzymujemy:

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + \frac{k}{m} \cdot y = 0 \qquad \textbf{(9)}$$

Do wzoru (9) wprowadźmy podstawienie:

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \qquad \textbf{(10)}$$

Otrzymamy wówczas:

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + \omega^2 \cdot y = 0 \qquad \textbf{(11)}$$

Jest to równanie ruchu harmonicznego i wynika z niego, że wychylenie masy **m** jest funkcją czasu. Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$y = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + c) \qquad \textbf{(12)}$$

gdzie:

y_0 - amplituda drgań,

$\omega \cdot t + c$ - faza drgań masy m,

c - faza początkowa drgań masy m.

Jeżeli przyjmiemy, że czas ruchu masy m rozpoczynamy mierzyć od momentu jej przejścia przez położenie równowagi, to **c = 0** i wzór **(12)** przyjmie postać:

$$y = y_0 \cdot \sin \omega \cdot t \qquad \textbf{(13)}$$

Masa **m** znajdując się w skrajnym dolnym położeniu **B**, przemieszcza się do punktu **C**, a następnie powraca ponownie do punktu wyjścia **B**. Czas potrzebny na pokonanie tej drogi nazywamy okresem drgań **T**. Jak wynika z równania **(13)** równy jest on:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \qquad \textbf{(14)}$$

stąd

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \qquad \textbf{(15)}$$

Wielkość **ω** nazywamy **częstością drgań**. Ze wzoru **(15)**, uwzględniając wcześniejsze podstawienie **(10)** można wyznaczyć wzór na **okres drgań sprężyny:**

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \textbf{(16)}$$

Ze wzoru **(16)** otrzymujemy prostą zależność na współczynnik sprężystości sprężyny:

$$k = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot m \qquad \textbf{(17)}$$

Tok rozumowania przedstawiony powyżej nie uwzględnia masy sprężyny. Masę sprężyny można uwzględnić przy założeniu, że zwoje sprężyny są równo zagęszczone na całej jej

długości (w rzeczywistości tak nie jest, ponieważ dolna część sprężyny rozciągana jest przez masę m, a górna część sprężyny również przez jej masę własną). Otrzymujemy wówczas wzór:

$$k = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot \left(m + \frac{1}{3} m_s \right) \qquad \textbf{(18)}$$

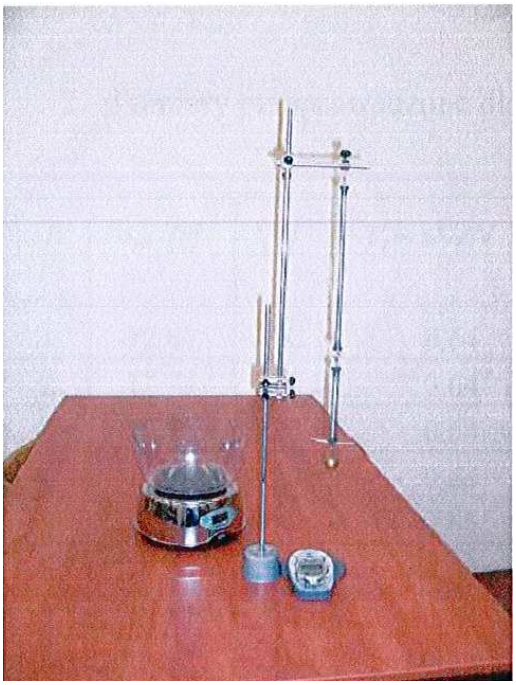
gdzie:

m_s – masa sprężyny.

PRZEBIEG ĆWICZENIA

Układ pomiarowy

Układ pomiarowy składa się ze statywu laboratoryjnego, jednej sprężyny z zaczepami, zestawu 2 ciężarków, wagi, stopera.



Przebieg ćwiczenia

1. Wybrać dwa ciężarki (płaski okrągły i w kształcie kuli)
2. Zawiesić sprężynę wraz z jednym ciężarkiem na wysięgniku statywu.
3. Odciągnąć ciężarek pionowo do dołu na ok. 4cm i wprawić go w ruch drgający. Zmierzyć czas trwania 20 pełnych cykli. Pomiar powtórzyć dziesięciokrotnie. Jeśli różnica pomiędzy pomiarami będzie większa niż 0,5s, błędny wynik należy odrzucić i powtórzyć pomiar.
4. Wyniki umieścić w tabeli 1.

5. Czynności z punktów 2÷4 powtórzyć dla drugiego ciężarka

Tabela 1 Wyniki pomiaru współczynnika sprężystości metodą dynamiczną

Czas t_{Ni} [s]	**N**	**Okres T [s]** $T_i=tN_i/N$	**m [kg]**	$k_i = \frac{4 \cdot \pi^2}{T_i^2} \cdot m$

OPRACOWANIE WYNIKÓW I DYSKUSJA BŁĘDÓW

Sprawozdanie powinno zawierać:

1. Krótki opis wykonywanych czynności i schemat układu pomiarowego.
2. Tabele z wynikami pomiarów.
3. Korzystając ze wzorów **(17)** i **(18)** obliczyć współczynniki sprężystości i wyniki zamieścić w tabeli 1.
6. Porównać otrzymane wyniki i przeprowadzić rachunek błędu. Obliczyć średni błąd kwadratowy oraz błąd przy zastosowaniu metody Studenta z założonym poziomem ufności α=0,95.

Literarura:

1. Jay Orear, *Fizyka*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa1998
2. Robert Resnick, David Halliday, *Fizyka*, PWN, Warszawa, 1998
3. Jerzy Lech Kacperski, *I pracownia fizyczna*, Wydaw. UŁ, Łódź, 1998