INSTYTUT ELEKTRONIKI
I SYSTEMÓW STEROWANIA

WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA

LABORATORIUM FIZYKI

ĆWICZENIE NR M-1

PRAWO HOOKE'A OSCYLACJE HARMONICZNE

Temat: **Prawo Hooke'a. Oscylacje harmoniczne.**

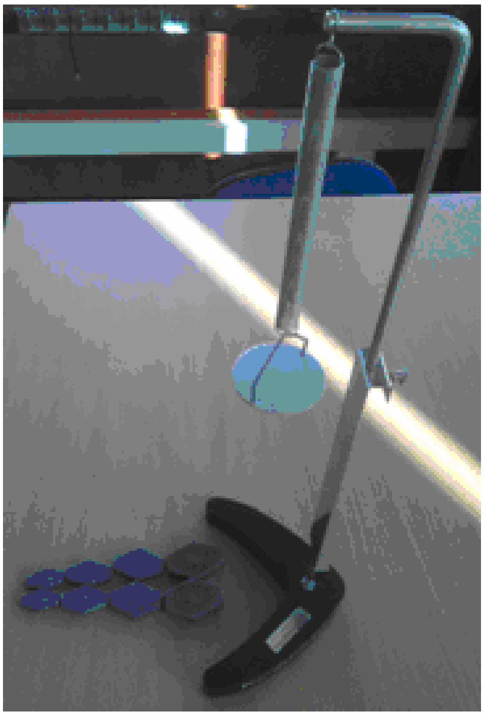
Zagadnienia: prawa dynamiki Newtona, siła sprężysta, prawo Hooke'a, oscylacje harmoniczne, okres oscylacji.

Koncepcja: Sprężyna obciążana różnymi masami wydłuża się – badane jest wydłużenie w funkcji siły obciążającej. Masa zawieszona na sprężynie, wytrącona z pionowego położenia równowagi, wykonuje oscylacje harmoniczne – okres oscylacji zależny jest od rodzaju sprężyny i masy obciążającej.

Zadania:

A. Wyznaczanie zależności pomiędzy wydłużeniem sprężyny i siłą obciążającą, dla dwóch różnych sprężyn.
B. Badanie okresu oscylacji masy zawieszonej na sprężynie w funkcji masy obciążającej dla dwóch rodzajów sprężyn.

Układ pomiarowy i procedura wykonania.



Rys.1. Układ doświadczalny badania wydłużenia sprężyny i oscylacji harmonicznych.

W zestawie doświadczalnym znajduje się komplet odważników, szalka oraz sprężyna

Zadanie A

Dla swobodnie wiszącej sprężyny (bez szalki) odczytujemy za pomocą skali milimetrowej położenie końca (dolnego) sprężyny i rejestrujemy jako wartość l_0 w tabeli (w pozycji obciążenia $m = 0$).

Dla sprężyny obciążonej masą m odczytujemy na skali położenie tego samego końca i rejestrujemy jako wartość l w tabeli. Masa samej szalki wynosi 10 g.

Pomiary powtarzamy dla kolejnych obciążeń m

Wyniki rejestrujemy w tabeli:

	Spr. 1		Spr. 2	
m [g]	l [mm]	$x = l - l_0$ [mm]	l [mm]	$x = l - l_0$ [mm]
0		0		0
20				
40				
200				

W ramach opracowania wyników sporządzamy na podstawie otrzymanych pomiarów wykresy oczekiwanych zależności liniowych $x(m)$ wydłużenia sprężyny w funkcji masy obciążającej.

Metodą graficzną lub za pomocą regresji liniowej wyznaczamy współczynniki kierunkowe otrzymanych prostych. Na podstawie tych wartości wyznaczamy współczynniki sprężystości sprężyn k. Błąd wyniku szacujemy metodą różniczki zupełnej.

Zadanie B

Dla pierwszej z badanych sprężyn, obciążamy ją wybranym odważnikiem m i odciągamy na niewielką odległość w dół, a następnie puszczamy tak, aby otrzymać oscylacje – ważne, aby oscylacje odbywały się w pionie.

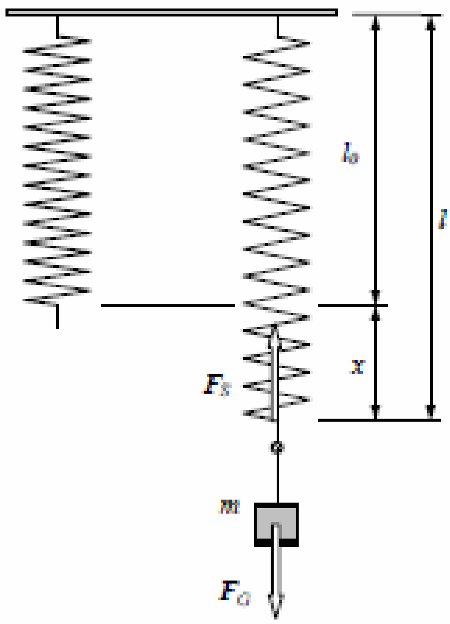
Dokonujemy pomiaru czasu t trwania 20 kolejnych cykli oscylacji, wybierając jako chwilę 'zero' mierzenia czasu najniższe położenie oscylującego odważnika. Jeden cykl oscylacji (okres T), to odstęp czasu pomiędzy dwoma kolejnymi np. najniższymi położeniami.

Pomiary powtarzamy dla kolejnych obciążeń m
Wyniki rejestrujemy w tabeli:

	Spr. 1			Spr. 2		
m [g]	$t = 20 \cdot T$ [s]	T [s]	T^2 [s²]	$t = 20 \cdot T$ [s]	T [s]	T^2 [s²]
40						
60						
.....						
.....						
200						

W ramach opracowania wyników sporządzamy na podstawie otrzymanych pomiarów wykresy oczekiwanych zależności liniowych $T^2(m)$ kwadratu okresu oscylacji w funkcji masy obciążającej.

Metodą graficzną lub za pomocą regresji liniowej wyznaczamy współczynniki kierunkowe otrzymanych prostych. Na podstawie tych wartości wyznaczamy współczynniki sprężystości sprężyn k. Błąd wyniku szacujemy metodą różniczki zupełnej.



Rys.1. Pomiary wydłużenia $x = l - l_0$ sprężyny obciążanej masą m .

Teoria i wyniki pomiarów.

Współcześnie formułuje się prawo Hooke'a (XVII w.) w rozszerzonej postaci obejmującej różne rodzaje deformacji sprężystych: poprzecznych, podłużnych i skrętnych. Jednakże w przypadku pręta rozciąganego siłą zewnętrzną F^{zewn}, jego wydłużenie względne opisywane jest prawem najbliższym pierwotnej wersji prawa Hooke'a ("Jakie wydłużenie, taka siła" – "Ut tensio, sic vis"):

$$F = -Y \cdot S \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad , \tag{1}$$

gdzie l jest długością pręta, Δl jego bezwzględnym wydłużeniem, S polem powierzchni przekroju poprzecznego, a F oznacza siłę sprężystą, którą należy zrównoważyć siłą rozciągającą F^{zewn}. Występujący we wzorze (1) symbol Y oznacza tzw. moduł Younga, który jest miarą własności sprężystych materiału przy deformacjach podłużnych podczas rozciągania i ściskania.

Sprężyna wykonana z pręta sprężystego zwiniętego w kształt linii śrubowej jest bardziej złożonym obiektem niż prosty rozciągany pręt. Wydłużenie sprężyny przy jej rozciąganiu oznacza zwiększenie skoku linii śrubowej, co wiąże się ze skręcaniem pręta tworzącego zwoje (deformacja skrętna). Okazuje się jednak, że i w tym przypadku wydłużenie sprężyny skutkuje wystąpieniem siły sprężystej proporcjonalnej do samego wydłużenia – tzw. siła sprężysta opisana formułą:

$$F_S = -k \cdot x \quad , \tag{2}$$

gdzie $x = \Delta l = l - l_0$ oznacza wydłużenie sprężyny, l_0 - długość swobodną, l - długość sprężyny rozciągniętej, natomiast k oznacza tzw. współczynnik sprężystości sprężyny. Współczynnik ten zależny jest od geometrycznych parametrów sprężyny (średnica D, ilość zwojów N), od grubości d pręta tworzącego zwoje oraz od właściwości materiału pręta określonych przez tzw. moduł skręcalności G:

$$k = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot N \cdot D^3} \quad . \tag{3}$$

Obciążenie zawieszonej pionowo sprężyny masą m powoduje jej wydłużenie x w takim stopniu, aby siła sprężysta sprężyny F_S zrównoważyła siłę grawitacji działającą na masę obciążającą m (Rys.1), a zatem:

$$\vec{F}_S + \vec{F}_G = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad -k \cdot x + mg = 0 \quad , \tag{4}$$

skąd wynika zależność pomiędzy wydłużeniem sprężyny a masą obciążającą:

$$x = \frac{g}{k} \cdot m \quad , \tag{5}$$

gdzie $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ jest tzw. przyspieszeniem ziemskim (natężeniem pola grawitacyjnego przy powierzchni Ziemi).

Zadanie A polega na sprawdzeniu oczekiwanej zależności liniowej pomiędzy wydłużeniem sprężyny i siłą rozciągającą, co jest równoważne sprawdzeniu zależności pomiędzy wydłużeniem x a masą obciążającą m zgodnie ze wzorem (5).

Przyrównanie współczynnika kierunkowego B do określającego go wyrażenia, wynikającego ze wzoru (5), pozwala na wyznaczenie współczynnika sprężystości k sprężyny poprzez obliczenie:

$$B = \frac{g}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{g}{B} \ , \tag{6}$$

a także na oszacowanie błędu tak obliczonej wartości k, zgodnie z formułą:

$$\Delta k = k \cdot \frac{\Delta B}{B} \ , \tag{7}$$

<u>Zadanie B</u> wiąże się z badaniem dynamiki ruchu masy m zawieszonej na sprężynie w polu grawitacyjnym. Stan równowagi zawieszonej masy określa równowaga siły grawitacji i siły sprężystej

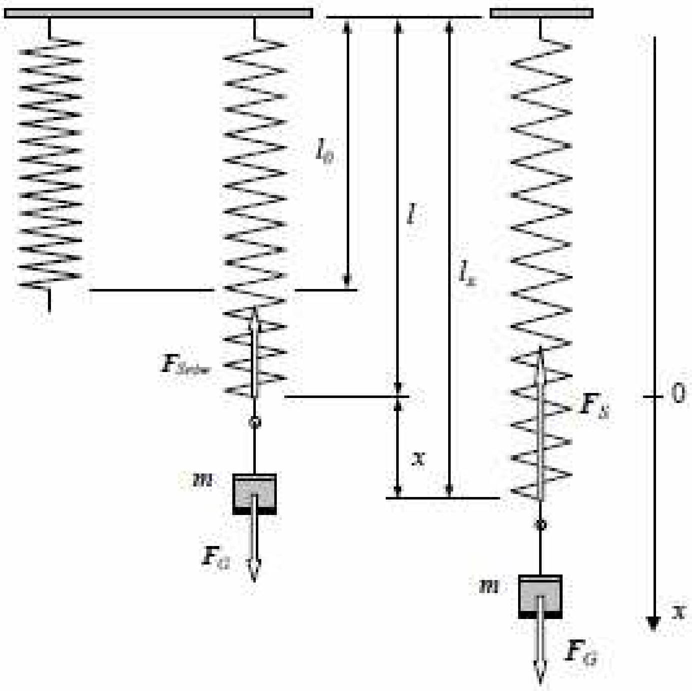
$$\vec{F}_{Srów} + \vec{F}_G = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad -k \cdot (l - l_0) + mg = 0 \ . \tag{8}$$

Jest to równowaga trwała, ponieważ każde wychylenie masy m w kierunku pionowym z położenia równowagi skutkuje wystąpieniem siły wypadkowej przeciwnie skierowanej do tego wychylenia

$$\vec{F}_x = \vec{F}_S + \vec{F}_G \quad \Rightarrow \quad F_x = -k \cdot (l_x - l_0) + mg \ . \tag{9}$$

Połączenie wzorów (8) i (9) pozwala wyrazić działającą na masę m siłę wypadkową w funkcji jej wychylenia $x = l_x - l$ z położenia równowagi:

$$F_x = -k \cdot (l_x - l) = -k \cdot x \ . \tag{10}$$



Opis położenia masy m odchylonej z położenia równowagi o x .

Zgodnie z drugim prawem dynamiki Newtona ruch masy m pod działaniem siły $F_x = -k \cdot x$ (wzór (10)), przy pominięciu sił oporów ruchu oraz zaniedbaniu masy sprężyny, opisany jest równaniem:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x \quad , \tag{11}$$

którego rozwiązaniem jest funkcja harmoniczna:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) \quad , \tag{12}$$

gdzie A jest amplitudą oscylacji, natomiast α oznacza tzw. fazę początkową – obydwa parametry ruchu zależą od warunków początkowych. Parametr ω, tzw. częstość kołowa oscylacji, zależny jest od właściwości układu fizycznego i w przypadku masy oscylującej pod działaniem siły sprężystej wyraża się wzorem:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad . \tag{13}$$

Otrzymane rozwiązanie (13) oznacza, że pod działaniem siły sprężystej $F_x = -k \cdot x$ masa m wykonuje oscylacje harmoniczne o okresie T równym:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \,. \tag{14}$$

Powyższy wzór (14) określający zależność okresu oscylacji od zawieszonej masy m oraz współczynnika sprężystości k otrzymany został bez uwzględnienia masy m_S samej sprężyny, która bierze jednak udział w ruchu. Próba uwzględnienia w sposób przybliżony masy m_S oscylującej sprężyny możliwa jest przez wprowadzenie poprawki we wzorze (14) sprowadzającej go do postaci:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + m_{ef}}{k}} \,, \tag{15}$$

gdzie tzw. masa efektywna sprężyny m_{ef}, przy założeniu $m > m_S$, daje się teoretycznie oszacować jako:

$$m_{ef} = \frac{m_S}{3} \,. \tag{16}$$

Ze wzoru (15) wynika, że kwadrat okresu T^2 powinien zmieniać się liniowo wraz z masą m obciążającą sprężynę, tzn.:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \cdot m + \frac{4\pi^2 \cdot m_{ef}}{k} \quad . \tag{17}$$

Przyrównanie współczynników A i B do określających je wyrażeń, wynikających ze wzoru (17), pozwala na wyznaczenie współczynnika sprężystości k sprężyny oraz masy efektywnej m_{eff} poprzez obliczenie:

$$B = \frac{4\pi^2}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4\pi^2}{B} \ , \tag{18}$$

oraz

$$A = \frac{4\pi^2 \cdot m_{eff}}{k} \quad \Rightarrow \quad m_{eff} = \frac{A}{B} \ , \tag{19}$$

a także na oszacowanie błędu tak obliczonych wartości k oraz m_{eff}, zgodnie z formułami:

$$\Delta k = k \cdot \frac{\Delta B}{B} \ , \qquad \Delta m_{eff} = m_{eff} \cdot \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \right) \ . \tag{20}$$

Literatura

H. Szydłowski – Pracownia Fizyczna, PWN Warszawa 1973 i późn.

J. Orear – Fizyka, T.1 i 2, WNT Warszawa 1990

R.Resnick, D.Halliday, J.Walker – Podstawy fizyki,