INSTYTUT ELEKTRONIKI
I SYSTEMÓW STEROWANIA

WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA

LABORATORIUM FIZYKI

ĆWICZENIE NR M-2

WYZNACZANIE PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO ZA POMOCĄ WAHADŁA MATEMATYCZNEGO

I. Zagadnienia do przestudiowania

1. Ruch harmoniczny
2. Oscylator harmoniczny prosty
3. Wahadło matematyczne
4. Metoda regresji liniowej

II. Cel ćwiczenia

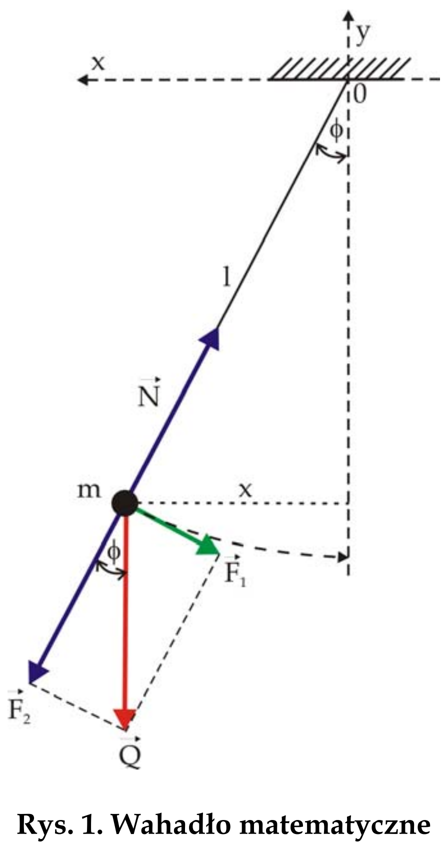
1. Wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego przy użyciu wahadła matematycznego z wykorzystaniem regresji liniowej.

III. Zasada pomiaru

Przy użyciu stopera mierzony jest okres małych drgań wahadła matematycznego proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z jego długości. Pomiar wykonywany dla różnych długości wahadła i małych kątów wychyleń do około 7° pozwala na wyznaczenie wartości przyśpieszenia ziemskiego g.

IV. Wprowadzenie teoretyczne

Wahadłem matematycznym nazywamy punkt materialny o masie m zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l. Taki układ wychylony z położenia równowagi o niewielki kąt φ i puszczony swobodnie porusza się ruchem drgającym prostym (Rys. 1).



Rys. 1. Wahadło matematyczne

<u>**Ćwiczenie M-2: Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego**</u>

Na punkt materialny działa siła naprężenia nici N i siła ciężkości Q, którą zgodnie z rys. 1 można rozłożyć na dwie składowe, mianowicie na F_1 styczną do łuku po którym porusza się punkt materialny i skierowaną przeciwnie do wychylenia z położenia równowagi (stąd znak minus przy jej wartości we wzorze (1) oraz na składową F_2 działającą w kierunku nici:

$$F_1 = -mg\sin\varphi \tag{1}$$

$$F_2 = mg\cos\varphi \tag{2}$$

Dla małych wychyleń $sin\varphi = \varphi$ można przyjąć, że $\varphi = \frac{x}{l}$ gdzie x jest wychyleniem z położenia równowagi.
Siłę F_1 można wtedy przedstawić jako:

$$F_1 = -mg\frac{x}{l} \tag{3}$$

Ruch wywołany przez tego rodzaju siłę wprost proporcjonalną do wychylenia i skierowaną do niego przeciwnie

$$F_1 = -kx \tag{4}$$

nazywamy ruchem harmonicznym prostym.

Wykorzystując definicję przyspieszenia $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ wyznaczoną podstawie II zasady dynamiki Newtona siłę można zaprezentować w postaci:

$$F_1 = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{5}$$

i wstawiając do równania (5) za F_1 wyrażenie (4) otrzymujemy:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{6}$$

Dzieląc powyższe równanie przez masę *m* i po prostych przekształceniach algebraicznych otrzymujemy równanie różniczkowe ruchu harmonicznego prostego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g\frac{x}{l} = 0 \tag{7}$$

Rozwiązaniem tego równania jest $x=Acos(\omega t+\alpha_0)$, gdzie A jest amplitudą czyli maksymalnym wychyleniem z położenia równowagi, a $(\omega t+\alpha_0)$ - fazą drgań

Widząc, że przyspieszenie $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\ A\omega^2 cos(\omega t+\alpha_0) = -\omega^2$, siłę F_1 z równania (5) można zapisać w postaci:

$$F_1 = ma = -m\omega^2 x \tag{8}$$

Następnie porównując siłę powodująca ruch harmoniczny wahadła z równania (3) z siłą w wyrażeniu (8):

$$-mg\frac{x}{l} = -m\omega^2 x \tag{9}$$

i po wyrugowaniu obustronnie masy m otrzymujemy zależność:

$$g\frac{x}{l} = \omega^2 x \tag{10}$$

gdzie: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ jest częstością drgań własnych, a T - okresem tych drgań

Czyli:

$$\frac{g}{l} = \frac{4\pi^2}{T^2}x \tag{11}$$

Stąd po odpowiednim przekształceniu okres T małych drgań wahadła matematycznego wyraża się wzorem:

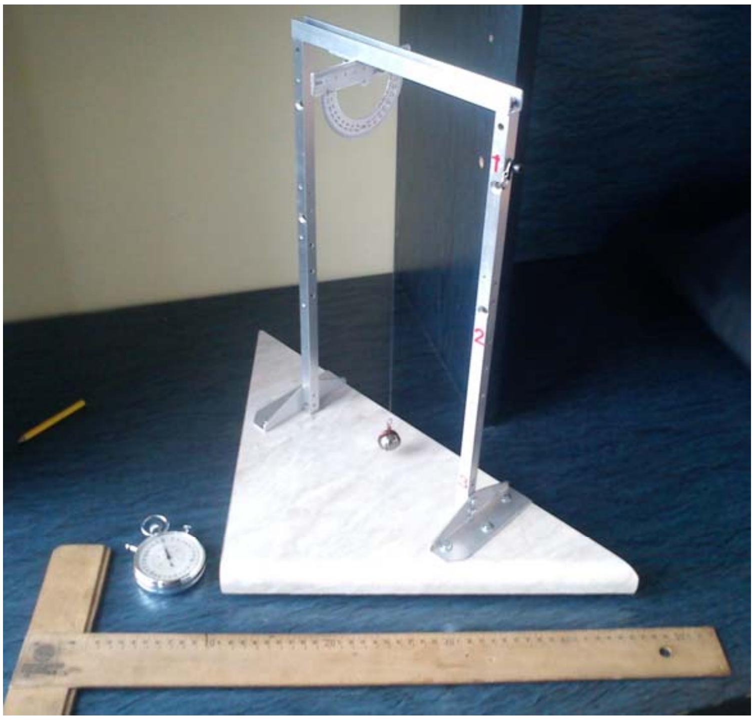
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{12}$$

Ze wzoru (12) widać, iż okres małych drgań wahadła matematycznego zależy od pierwiastka kwadratowego jego długości, natomiast nie zależy od jego masy.
Podnosząc równanie (12) do kwadratu, widać iż kwadrat małych drgań wahadła matematycznego jest liniową funkcją długości tego wahadła, a mianowicie:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}l \tag{13}$$

V. Zestaw pomiarowy

Wahadło matematyczne, stoper, przyrząd metrowy



Rys.2. Pomiar przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego

VI. Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć długość wahadła przy użyciu przymiaru metrowego od punktu zamocowania linki do środka kulki zamocowanej na lince.
2. Odchylić kulkę o niewielki kąt ($\varphi \leq 7°$) i następnie ją puścić tak, aby otrzymać oscylacje odbywające się w poziomie.
3. Dokonać stoperem pomiaru czasu *t* trwania 20 kolejnych pełnych cykli oscylacji, wybierając jako chwilę „zero" mierzenia czasu np. „lewe" najwyższe położenie oscylującej kulki. Jeden cykl oscylacji, tzn. okres T to odstęp czasu pomiędzy dwoma kolejnymi „lewymi" najwyższymi położeniami kulki. Wyniki zarejestrować w tabeli.
4. Pomiary czasu *t* z pkt. 2 przeprowadzić dla 8 różnych długości wahadła. Wyniki zapisać w tabeli.

V. Tabela pomiarowa

Lp.	l [m]	t [s]	n	$T=\frac{t}{n}$ [s]	T^2 [s^2]	a [s^2/m]	b [s^2]	g [m/s^2]	Δg [m/s^2]
1.									
2.									
…									
8.									

VI. Opracowanie wyników

1. Obliczyć okresy drgań oraz ich kwadraty. Wyniki wpisać do tabeli.
2. Kwadrat okresu drgań wahadła matematycznego zgodnie ze wzorem (13) zależy liniowo od długości wahadła, czyli funkcja $T^2(l)$ jest linia prostą o równaniu $y = ax + b$, gdzie:

$$y \to T^2$$
$$x \to l$$

   Parametr a nachylenia prostej:

$$a = \frac{4\pi^2}{g}$$

   Parametr b powinien być bliski zero.
   Przy użyciu regresji liniowej wyznaczyć parametry a i b oraz ich odchylenia standardowe S_a i S_b.
   Metoda regresji liniowej dokładnie została opisana w literaturze [3] oraz sposoby wyznaczenia parametrów regresji liniowej przedstawiono w załączniku niniejszej instrukcji.
3. Wyznaczyć przyspieszenie ziemskie g ze wzoru:

$$g = \frac{4\pi^2}{a}$$

4. Obliczyć błąd bezwzględny Δg zgodnie ze wzorem:

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{a} S_a$$

5. Oszacować błąd względny procentowy przyspieszenia ziemskiego

$$\delta_g = \frac{\Delta g}{g} \cdot 100\%$$

6. Zapisać wartość g z uwzględnieniem niepewności pomiarowej.
7. Sporządzić wykres zależności liniowej $T^2(l)$ kwadratu okresu w funkcji długości wahadła. Na wykres nanieść prostą typu $y = ax + b$.
8. Przedyskutować dlaczego parametr b jest różny od zera.
9. Przeanalizować uzyskany wynik g i porównać go z wartością tablicową.

Literatura

1. R. Resnick, D.Halliday, J.Walker, Podstawy fizyki.
2. T. Dryński, Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, PWN, Warszawa.
3. J. Lech Opracowanie wyników pomiarów w laboratorium podstaw fizyki, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Wydział Inżynierii Procesowej, Materiałowej i Fizyki Stosowanej, Częstochowa 2005.

Załącznik: Regresja liniowa-klasyczna (metoda najmniejszych kwadratów)

Jeżeli pomiędzy dwiema wielkościami fizycznymi występuje zależność liniowa, regresja liniowa jest prostą (choć niekiedy pracochłonną) metodą wyznaczenia parametrów najlepiej dopasowanej prostej. Uzyskane parametry dopasowania mogą następnie posłużyć do wyznaczenia szukanej wielkości fizycznej.

METODA 1

Parametry prostej określonej równaniem $y = ax + b$ można wyznaczyć przy użyciu formuł:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2} \qquad b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

gdzie: x_i, y_i - wartości uzyskane z eksperymentu

n - liczba wykonanych pomiarów

Niepewności standardowe wartości a i b określone są formułami:

$$S_a = \sqrt{\frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - b \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{(n-2)\left(n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)}} \qquad Sb = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot S_a^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Zapis : $y = (a \pm S_a)x + (b \pm S_b)$

Współczynnik korelacji oznaczany przez R, zdefiniować można jako:

$$R = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) \cdot \left(n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}}$$

Współczynnik korelacji zawiera się między -1 a 1. Dane są bardziej skorelowane, czyli bardziej zależne od siebie, czym jego wartość bezwzględna jest bliższa jedności.

Gdy $|R| = 1$ oznacza to, że dane idealnie leżą na prostej $y = ax + b$.

Gdy $|R| = 0$ wtedy dane od siebie w ogóle nie zależą.

Najczęściej w praktyce spotyka się wartości pośrednie współczynnika R.

Ćwiczenie M-2: Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego

METODA 2

Współczynniki regresji liniowej i ich odchylenia standardowe można wyznaczyć w Excelu. Do tego celu służy funkcja statystyczna **REGLINP** w wariancie funkcji tablicowej. Funkcje tablicowe to takie, które zwracają kilka wyników równocześnie, zapełniając wskazaną tablicę (zakres komórek).

Postępowanie:

1. Należy wprowadzić dane eksperymentalne x_i i y_i do komórek arkusza kalkulacyjnego.
2. W celu wykonania funkcji tablicowej – tablicowe to takie funkcje, które zwracają kilka wyników równocześnie, zapełniając wskazaną tablice (zakres komórek), należy zaznaczyć w arkuszu obok siebie zakres komórek np. 2K × 3W, gdzie K=kolumny, a W=wiersze, czyli np. zakres D1:E3.
3. W celu przywołania funkcji tablicowej **REGLINP**, należy wybrać polecenie WSTAW a następnie FUNKCJA.
4. Z kategorii WSZYSTKIE lub STATYSTYCZNE należy wybrać funkcje **REGLINP.**
5. W oknie wprowadzania parametrów należy podać parametry funkcji:

   w wierszu *znane _y* – zakres komórek zawierających wartości rzędnych y,
   w wierszu *znane_x* - zakres komórek zawierających wartości odciętych x,
   w wierszu *stała* - nic lub *prawda* (1), a jeśli wymuszamy wartość b=0, to argument stała wynosi fałsz (0),
   w wierszu *statystyczny* – wartość logiczną *prawda* (1) jeśli żądamy podania niepewności oszacowania parametrów a i b.

6. Po wprowadzeniu parametrów zamknąć okno tablicy klikając na przycisk **OK** a następnie od razu kliknąć wskaźnikiem myszy na tzw. *pasek formuł* znajdujący się nad arkuszem, tak aby pojawił się tam i zaczął mrugać wskaźnik tekstowy.
7. Przyciskając jednocześnie kombinację klawiszy **CTRL+SHIFT+ENTER** w sześciu komórkach zaznaczonych w pkt. 2 pojawią się wartości wyliczone metodą najmniejszych kwadratów.

a			b
S_a			S_b
R^2			

gdzie: a – kąt nachylenia prostej
b – rzędna początkowa
S_a – odchylenie standardowe od wartości a
S_b – odchylenie standardowe od wartości a
R^2 – współczynnik korelacji określający zgodność danych z linią trendu